

التقدير البيزي لمعلمت نموذج متجه الانحدار الذاتي باعتماد معلومات اولية خبرية

The Bayesian Estimate of Vector Autoregressive Model Parameters Adopt Informative Prior Information

أ.م.د. هيفاء عبدالجواد سعيد	أ.م.د. وصفي ظاهر صالح	م. محاسن صالح الطالب
قسم الاحصاء والمعلوماتية	قسم الاحصاء	قسم الاحصاء والمعلوماتية
كلية علوم الحاسوب والرياضيات	كلية الادارة والاقتصاد	كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة الموصل	جامعة صلاح الدين	جامعة الموصل

المستخلص:

تضمن هذا البحث التقدير البيزي لمعلمت نموذج متجه الانحدار الذاتي (Vector Autoregressive model) ذات الرتبة (p) ($VAR(p)$) بالاضافة الى الاختبارات الاحصائية والتنبؤ البيزي عندما يتبع الخطأ العشوائي للنموذج توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم. تمثلت المعلومات الاولية حول معلمت النموذج بتوزيعات احتمالية تنتمي الى العوائل المتألفة ، وقد تبين ان التوزيع الاحتمالي الحدي اللاحق لمصفوفة المعلمت (Φ) هو توزيع t Matrix، التوزيع الاحتمالي الحدي اللاحق لمصفوفة التباين المشترك (Σ) هو توزيع غير شائع والتوزيع الاحتمالي التنبؤي لمتجه المشاهدات المستقبلية هو توزيع t متعدد المتغيرات.

Abstract:

This research included the bayesian estimate for vector Autoregressive model with rank (p) in addition to statistical tests and predict Bayesian when the random error of model followed generalized multivariate modified Bessel distribution. The prior information about the parameters of model is represented by probability distributions belong to conjugate families. It found that the posterior marginal probability distribution for parameters matrix (Φ) is a Matrix t distribution, The posterior marginal probability distribution of covariance matrix (Σ) is uncommon and the predictive probability distribution of future observations vector is multivariate t distribution.

(1) المقدمة:

في العصر الحديث اصبح جمع البيانات عملية سهلة ولاي عدد من المتغيرات، تحليل هذه المتغيرات جميعها ولاسيما المرتبطة منها في وقت واحد هو ماينصب عليه الاهتمام ، يعد تحليل السلاسل الزمنية متعددة المتغيرات (multivariate time series) وسيلة جيدة لتحليل هذه البيانات وتطبيقه واسع الانتشار في مجالات عديدة الطب، السياسة، الاقتصاد يعد نموذج متجه الانحدار الذاتي (VAR) (Vector Autoregressive model) من النماذج الشائعة الاستخدام في تحليل مثل هذه البيانات ، حيث اهتم [1] بدراسة خصائص التوزيعات اللاحقة لمقدرات بيز بالاعتماد على توزيعات اولية غير خبرية لنماذج (VAR) ووجد ان مقدرات بيز تفوقت على مقدرات الامكان الاعظم لمصفوفتي المعلمت والتباين

المشترك، في اغلب الاحيان يكون حد الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي ، اذ قام [2] بالتقدير البيزي لمصفوفة معلمات نموذج (VAR) ومصفوفة التباين المشترك عندما يتبع الخطأ العشوائي التوزيع الطبيعي وتوزيع t تحت دوال خسارة وتوزيعات اولية مختلفة.

لكن هناك مجالات مختلفة يكون فيها حد الخطأ يتبع توزيعات ذات نهايات اثل من التوزيع الطبيعي، في مثل هذه الحالة تكون التوزيعات الخليطة هي الانسب ، من هذه التوزيعات توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعم (Generalized Multivariate Modified Bessel Distribution(GMMB)) حيث يعتبر هذا التوزيع حالة خاصة من التوزيعات متعددة المتغيرات المتماثلة الزائدية [3] ، درس [4] خصائص توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعم واستخدما التحليل البيزي لايجاد التوزيع اللاحق والتوزيع التنبؤي لنموذج خطي بافتراض ان التوزيع الاول للمعلمات الثابتة هو معكوس كاوس المعم.

افرد المبحث الثاني لوصف نموذج متجه الانحدار الذاتي الذي يكون فيه الخطأ يتبع توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعم . في حين تناول المبحث الثالث التقدير البيزي لمعلمات النموذج في حالة المعلومات الاولى الخبرية . تضمن المبحث الرابع الاختبارات الاحصائية البيزية لمصفوفة المعلمات (Φ) وايجاد صيغة عامل بيز. وضع المبحث الخامس التوزيع التنبؤي للملاحظات المستقبلية التي تمثلت بشكل متجه هو (y_{T+i}). اما المبحث السادس عرض ابرز الاستنتاجات للدراسة.

(2) وصف النموذج :

ان نموذج متجه الانحدار الذاتي Vector Autoregressive (VAR) لمتغير عمودي ببعد ($K \times 1$) يأخذ الصيغة الآتية [2]:

$$y_t = \underline{C} + \sum_{i=1}^p B_i y_{t-i} + u_t \quad , \quad t = 1, 2, \dots, T \quad \dots (1)$$

اذ ان

K : عدد المتغيرات (السلاسل الزمنية) المدروسة.

P : رتبة النموذج.

t : تسلسل المشاهدة في السلسلة الزمنية .

T : عدد المشاهدات الكلية لكل سلسلة زمنية .

\underline{C} : متجه معلمات (parameters) ببعد ($K \times 1$) يمثل المقطع.

B_i : مصفوفة معلمات ذات بعد ($K \times K$).

y_{t-i} : متجه عمودي ذي بعد ($K \times 1$) بفرق زمني مقداره i .

u_t : متجه عمودي ذات بعد ($K \times 1$) يمثل الاخطاء العشوائية.

يمكن كتابة النموذج (1) بالصيغة الآتية :

$$y_t = \Phi x_t + u_t \quad \dots (2)$$

اذ ان :

$$\underline{x}'_t = [1 \quad y'_{t-1} \quad y'_{t-2} \quad \dots \quad y'_{t-p}]_{(1 \times (kp+1))} \quad \dots (3)$$

$$\Phi_{kX(kP+1)} = [C_{kX1} \quad B_{1_{kXk}} \quad B_{2_{kXk}} \quad \dots \quad B_{P_{kXk}}]$$

وإذا كان لدينا T من المشاهدات لكل سلسلة زمنية يمكن كتابة النموذج (2) بصيغة المصفوفات [5] وكالاتي:

$$Y = \Phi X + U \quad \dots (4)$$

اذ ان :

Y : مصفوفة المتغيرات (السلاسل الزمنية) ذات بعد (kXT) .

X : مصفوفة ذات بعد $((kp+1)XT)$ اعمدها تمثل المتجهات الموضحة في المعادلة (3).

U : مصفوفة الاخطاء العشوائية ذات بعد (kXT) .

لنفرض ان متجه الاخطاء العشوائية u_t يتبع توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم، حيث يمكن ايجاد دالة كثافة الاحتمال بالاستعانة بالتوزيعات الخليطة من التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات وتوزيع معكوس كاوس المعمم وكالاتي [6] :

$$u_t | \tau \sim N_k(0, \tau \Sigma)$$

اذ ان :

τ : متغير عشوائي .

Σ : مصفوفة التباين للمتغير العشوائي (τ) .

فان دالة كثافة احتمال $(u_t | \tau)$ هي :

$$f(u_t | \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |\tau \Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2\tau} u_t' \Sigma^{-1} u_t} \quad -\infty < u_t < \infty \quad \dots (5)$$

$$\tau \sim GIG(\lambda, \psi, \nu)$$

فان دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي (τ) هي [7]

$$P(\tau) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{\nu}{2}} \tau^{\nu-1}}{2\kappa_{\nu}(\sqrt{\lambda\psi})} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{\tau} + \lambda\tau\right)} \quad , \tau > 0 \quad \dots (6)$$

وعليه فان دالة احتمال الخطأ العشوائي u_t غير المشروط بـ (τ) هي:

$$f(u_t) = \int_{\tau} f(u_t | \tau) P(\tau) d\tau \quad \dots (7)$$

$$f(u_t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{k}{4}} K_{\frac{2\nu-k}{2}} \left(\sqrt{\lambda\psi \left(1 + \frac{u_t' \Sigma^{-1} u_t}{\psi}\right)} \right) \left(1 + \frac{u_t' \Sigma^{-1} u_t}{\psi}\right)^{\frac{2\nu-k}{4}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} K_{\nu}(\sqrt{\lambda\psi})} \quad \dots (8)$$

المعادلة (8) تمثل دالة كثافة احتمال توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم [8] .

اذ ان :

(λ, ψ, ν): تمثل معلمات الشكل (shape parameters) ومجال هذه المعلمات هو [9]:

$$\begin{aligned} \psi > 0, \lambda \geq 0 \text{ if } \nu < 0 \\ \psi > 0, \lambda > 0 \text{ if } \nu = 0 \\ \psi \geq 0, \lambda > 0 \text{ if } \nu > 0 \end{aligned} \quad \dots (9)$$

$K_\nu(x)$: دالة Bessel المحورة من النوع الثالث والرتبة (ν) والتي تأخذ الصيغة الآتية [10]

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} dt \quad \dots (10)$$

كما يعبر عن التوزيع الاحتمالي لمتجه الاخطاء العشوائية (\underline{u}_t) وصفيًا بالآتي:

$$\underline{u}_t \sim \text{GMMB}_k(0, \Sigma, \lambda, \psi, \nu)$$

وبما ان متجه المتغيرات العشوائي \underline{y}_t المعرف بالمعادلة (2) عبارة عن تركيبة خطية بدلالة متجه الاخطاء العشوائي \underline{u}_t الذي يتبع توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم لذلك فان التوزيع الاحتمالي لمتجه \underline{y}_t ممكن ايجاده بنفس الطريقة وكالآتي [11]:

$$E(\underline{y}_t | \tau) = \Phi X_t$$

$$V(\underline{y}_t | \tau) = \tau \Sigma$$

$$\therefore \underline{y}_t | \tau \sim N_k(\Phi X_t, \tau \Sigma)$$

وعليه فان \underline{y}_t غير المشروط بالمتغير τ يتبع توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم ودالة كثافة احتماله هي:

$$f(\underline{y}_t) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\psi}\right)^{\frac{k}{2}} K_{\frac{2\nu-k}{2}} \left(\sqrt{\lambda \psi \left(1 + \frac{(\underline{y}_t - \Phi X_t)' \Sigma^{-1} (\underline{y}_t - \Phi X_t)}{\psi} \right)} \right)}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} K_\nu(\sqrt{\lambda \psi})} \cdot \left(1 + \frac{(\underline{y}_t - \Phi X_t)' \Sigma^{-1} (\underline{y}_t - \Phi X_t)}{\psi} \right)^{\frac{2\nu-k}{4}} \quad \dots (11a)$$

ويمكن التعبير عن هذا التوزيع وصفيًا بالآتي:

$$\underline{y}_t \sim \text{GMMB}_k(\Phi X_t, \Sigma, \lambda, \Psi, \nu)$$

(3) التقدير البيزي لمعلمات نموذج متجه الانحدار الذاتي من الرتبة (p) $\text{VAR}(p)$:

ان معلمات نموذج متجه الانحدار الذاتي المعرف في المعادلة (2) هي مصفوفة المعلمات (Φ) ومصفوفة التباين (Σ) وعلى فرض انهما غير معلومتين وان التوزيعات الاولية لهذه المعلمات تنتمي الى العائلة المتألفة (Conjugate family) اذ ان التوزيع الاولي لمصفوفة المعلمات Φ المشروط ب (Σ, τ) هو توزيع Matrix normal، ويوصف بالآتي:

$$\Phi | \Sigma, \tau \sim N_{k, kp+1}(\Phi, \tau \Sigma, H_1)$$

دالة كثافة احتمال التوزيع الاولي لمصفوفة المعلمات (Φ) المشروط ب (Σ, τ) هي:

$$P(\Phi | \Sigma, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{kp+1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \{ (\Phi - \Phi_1) H_1^{-1} (\Phi - \Phi_1)' \} \right] \quad \dots (12)$$

التوزيع الاولي لمصفوفة التباين المشترك (Σ) المشروط ب (τ) هو توزيع معكوس ويشارت والذي يوصف بالآتي:

$$\Sigma|\tau \sim IW(A_1, m)$$

دالة كثافة احتمال التوزيع الاولي لمصفوفة التباين المشترك (Σ) المشروط بـ (τ) هي :

$$P(\Sigma|\tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{m+k+1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1}A_1\right] \quad \dots (13)$$

اذ ان:

A_1 : مصفوفة ثابتة اكيدة الايجابية.

باستخدام نظرية بيز فان التوزيع الاولي المشترك لـ (Φ, Σ) المشروط بـ (τ) ياخذ الصيغة الآتية:

$$P(\Phi, \Sigma|\tau) = P(\Phi|\Sigma, \tau)P(\Sigma|\tau) \quad \dots (14)$$

وبتعويض المعادلتين (12) و (13) في المعادلة (14) نحصل على :

$$P(\Phi, \Sigma|\tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{m+k+kp+1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1}\{A_1 + (\Phi - \Phi_1)H_1^{-1}(\Phi - \Phi_1)'\}\right] \dots (15)$$

دالة الترجيح المشروطة بـ (τ) هي :

$$f(y_t|\Phi, \Sigma, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \sum_{t=1}^T (y_t - \Phi x_t)' \Sigma^{-1} (y_t - \Phi x_t)\right] \quad \dots (16a)$$

وبإضافة وطرح $\bar{\Phi}x_t$ الى قوسي الدالة الاسية في المعادلة (16a) واجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على :

$$f(Y|\Phi, \Sigma, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1}\{(y_t - \bar{\Phi}x_t)(y_t - \bar{\Phi}x_t)' + (\Phi - \bar{\Phi})XX'(\Phi - \bar{\Phi})'\}\right] \quad \dots (16b)$$

اذ ان $\bar{\Phi} = YX'(XX')^{-1}$ وتمثل مقدر الامكان الاعظم لمصفوفة المعلمات (Φ) وباستخدام نظرية بيز فان التوزيع اللاحق المشترك لـ (Φ, Σ) المشروط بـ (τ) ياخذ الصيغة الآتية:

$$P(\Phi, \Sigma|Y, \tau) = P(\Phi, \Sigma|\tau)f(Y|\Phi, \Sigma, \tau) \quad \dots (17)$$

نعوض المعادلتين (15) و (16a) في المعادلة (17) نحصل على :

$$P(\Phi, \Sigma|Y, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+m+k+kp+2}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1}\{A_1 + (Y - \bar{\Phi}X)(Y - \bar{\Phi}X)'\}\right] \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1}\{(\Phi - \Phi_1)H_1^{-1}(\Phi - \Phi_1)' + (\Phi - \bar{\Phi})XX'(\Phi - \bar{\Phi})'\}\right] \quad \dots (18)$$

نحول الدالة الاسية الثانية في المعادلة (18) الى صيغة Vector operator وكالاتي:

$$P(\text{vec}\Phi, \Sigma|Y, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+m+k+kp+2}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1}\{A_1 + (Y - \bar{\Phi}X)(Y - \bar{\Phi}X)'\}\right] \exp\left[(\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi_1)'(H_1 \otimes \Sigma)^{-1}(\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi_1) + (\text{vec}\Phi - \text{vec}\bar{\Phi})'((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}(\text{vec}\Phi - \text{vec}\bar{\Phi})\right] \quad \dots (19)$$

الشكل التربيعي (Quadratic form) في المعادلة (19) يمكن تشبيهه بالشكل التربيعي الآتي [12]

$$(X - a)'A(X - a) + (X - b)'B(X - b) = (X - c)'(A + B)(X - c)$$

$$+ (a - b)'A(A + B)^{-1}B(a - b) \quad \dots (20)$$

عندما

$$c = (A + B)^{-1}(Aa + Bb)$$

$$A(A + B)^{-1}B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

اذ ان

$$X = \text{vec}\Phi, a = \text{vec}\Phi_1, b = \text{vec}\tilde{\Phi}, A = (H_1 \otimes \Sigma)^{-1}, B = ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}$$

$$c = [(H_1 \otimes \Sigma)^{-1} + ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}]^{-1} [(H_1 \otimes \Sigma)^{-1} \text{vec}\Phi_1 + ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1} \text{vec}\tilde{\Phi}]$$

نضيف ونطرح المصفوفة $((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}$ الى الحد الذي يحوي على Φ_1 في المتجه C، ثم نعرف المصفوفة الاولى من المتجه C بـ D-1 واجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على:

$$D^{-1} = [(H_1 \otimes \Sigma)^{-1} + ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}]^{-1}$$

$$c = \text{vec}\Phi_1 + D^{-1}((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}(\text{vec}\tilde{\Phi} - \text{vec}\Phi_1) = \text{vec}\Phi^* \quad \dots (21)$$

التوزيع اللاحق الكامل المشترك لـ $(\text{vec}\Phi, \Sigma)$ المشروط بـ τ هو :

$$P(\text{vec}\Phi, \Sigma | Y, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+m+k+kp+2}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \{A_1 + (Y - \tilde{\Phi}X)(Y - \tilde{\Phi}X)'\} \right] \\ \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \{(\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi^*)' D (\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi^*) \right. \\ \left. + (\text{vec}\Phi_1 - \text{vec}\tilde{\Phi})' [(H_1 \otimes \Sigma) + ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)]^{-1} (\text{vec}\Phi_1 - \text{vec}\tilde{\Phi}) \} \right] \dots (22)$$

بارجاع المعادلة (22) الى صيغة المصفوفات يكون التوزيع اللاحق المشترك لـ (Φ, Σ) المشروط بـ τ هو :

$$P(\Phi, \Sigma | Y, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{T+m+k+1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \{A_1 + (Y - \tilde{\Phi}X)(Y - \tilde{\Phi}X)'\} \right. \\ \left. + (\Phi_1 - \tilde{\Phi}) [H_1 + (XX')^{-1}]^{-1} (\Phi_1 - \tilde{\Phi})' \right] \\ \cdot |\Sigma|^{-\frac{kp+1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \{(\Phi - \Phi^*) (H_1^{-1} + (XX')) (\Phi - \Phi^*)'\} \right] \dots (23)$$

المعادلة (23) تمثل حاصل ضرب نواة توزيع معكوس ويشارت المشروط بـ (τ) بالمعلمات $(T + m)$ و $(\frac{A_2}{\tau})$ ونواة توزيع Matrix normal المشروط بـ (τ) بالمعلمات (Φ^*) و $[\tau \Sigma, (H_1^{-1} + (XX'))^{-1}]$

اذ ان

$$A_2 = \{A_1 + (Y - \tilde{\Phi}X)(Y - \tilde{\Phi}X)'\} + (\Phi_1 - \tilde{\Phi}) [H_1 + (XX')^{-1}]^{-1} (\Phi_1 - \tilde{\Phi})'$$

التوزيع اللاحق الكامل المشترك لـ (Φ, Σ) المشروط بـ τ هو :

$$P(\Phi, \Sigma | Y, \tau) = \frac{\left| \frac{A_2}{\tau} \right|^{\frac{T+m}{2}} |H_1^{-1} + (XX')|^{-\frac{k}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k(kp+1)}{2}} |\tau \Sigma|^{\frac{Lk+1}{2}} |\Sigma|^{\frac{T+m+k+1}{2}} \frac{k(T+m)}{2} \Gamma_k \left(\frac{T+m}{2} \right)} \\ \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \{A_2 + (\Phi - \Phi^*) (H_1^{-1} + (XX')) (\Phi - \Phi^*)'\} \right] \dots (24)$$

وان مقدر بيز لمصفوفة المعلمات (Φ) هو (Φ^*) المعرف بالمعادلة (21) .

التوزيع اللاحق الكامل المشترك لـ (Φ, Σ) غير المشروط هو :

$$P(\Phi, \Sigma|Y) = \frac{|A_2|^{\frac{T+m}{2}} \left(\frac{\lambda}{\Psi}\right)^{\frac{k(T+m+kp+1)}{4}} |H_1^{-1} + (XX')|^{\frac{k}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k(kp+1)}{2}} |\Sigma|^{\frac{T+m+k+kp+2}{2}} \frac{k(T+m)}{2} \Gamma_k\left(\frac{T+m}{2}\right) K_\nu(\sqrt{\lambda\Psi})} \\ \cdot K_{\frac{2\nu-k(T+m+kp+1)}{2}} \left(\sqrt{\lambda\Psi \left(1 + \frac{\text{tr}\Sigma^{-1}[A_2 + (\Phi - \Phi^*)(H_1^{-1} + (XX'))(\Phi - \Phi^*)']}{\Psi}\right)} \right) \\ \cdot \left(1 + \frac{\text{tr}\Sigma^{-1}[A_2 + (\Phi - \Phi^*)(H_1^{-1} + (XX'))(\Phi - \Phi^*)']}{\Psi}\right)^{\frac{2\nu-k(T+m+kp+1)}{4}}$$

ولإيجاد التوزيع الحدي اللاحق الكامل غير المشروط لمصفوفة المعلمات Φ نكامل المعادلة (24) نسبة الى المصفوفة (Σ) والمتغير (τ) على الترتيب كالاتي :

$$P(\Phi|Y) = \int_{\tau} \int_{\Sigma} P(\Phi, \Sigma|Y, \tau) p(\tau) d\Sigma d\tau \quad \dots (25)$$

$$P(\Phi|Y, \tau) = \frac{|A_2|^{\frac{T+m}{2}} |H_1^{-1} + (XX')|^{\frac{k}{2}} \Gamma_k\left(\frac{T+m+kp+1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{k(kp+1)}{2}} \Gamma_k\left(\frac{T+m}{2}\right) |A_2 + (\Phi - \Phi^*)(H_1^{-1} + (XX'))(\Phi - \Phi^*)'|^{\frac{T+m+kp+1}{2}}} \dots (26)$$

يمكن اعادة كتابة المعادلة (26) بالصيغة الآتية:

$$P(\Phi|Y) = C(k, kp + 1, \nu) \frac{|A_2|^{\frac{T+m}{2}} |H_1^{-1} + (XX')|^{\frac{k}{2}}}{|A_2|^{\frac{T+m+kp+1}{2}} |I_k + A_2^{-1}(\Phi - \Phi^*)(H_1^{-1} + (XX'))(\Phi - \Phi^*)'|^{\frac{T+m+kp+1}{2}}}$$

اذ ان

$$C(k, kp + 1, \nu) = \frac{\Gamma_k\left(\frac{T+m+kp+1}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{k(kp+1)}{2}} \Gamma_k\left(\frac{T+m}{2}\right)}, \quad \nu: \text{درجة الحرية}$$

وباستخدام الخاصية الآتية [12].

$$|I_k - PQ| = |I_L - QP|$$

اذ ان $Q_{L \times k}, P_{k \times L}$ اي مصفوفتين

$$\therefore P(\Phi|Y) = C(k, kp + 1, \nu) \frac{|A_2|^{-\frac{kp+1}{2}} |H_1^{-1} + (XX')|^{\frac{k}{2}}}{|A_2|^{\frac{T+m+kp+1}{2}} |I_{kp+1} + (H_1^{-1} + (XX'))(\Phi - \Phi^*)' A_2^{-1} (\Phi - \Phi^*)|^{\frac{T+m+kp+1}{2}}}$$

وان

$$C(k, kp + 1, \nu) = C(kp + 1, k, \nu)$$

$$\frac{\Gamma_k \left(\frac{T+m+kp+1}{2} \right)}{\Gamma_k \left(\frac{T+m}{2} \right)} = \frac{\Gamma_{kp+1} \left(\frac{T+m+kp+1}{2} \right)}{\Gamma_{kp+1} \left(\frac{T+m-k+kp+1}{2} \right)}$$

وعليه يكون التوزيع الحدي اللاحق الكامل لمصفوفة المعلمات Φ غير المشروط هو:

$$P(\Phi|Y) = \frac{\Gamma_{kp+1} \left(\frac{T+m+kp+1}{2} \right)}{(2\pi)^{\frac{k(kp+1)}{2}} \Gamma_{kp+1} \left(\frac{T+m-k+kp+1}{2} \right)} \frac{|A_2|^{-\frac{kp+1}{2}} |H_1^{-1} + (XX')|^{-\frac{k}{2}}}{\dots (27)}$$

نلاحظ من المعادلة (27) ان مصفوفة المعلمات (Φ) تتبع توزيع t Matrix بالمعلمات $(\Phi^*, A_2, (H_1^{-1} + (XX'))^{-1}, v)$ ودرجة حرية $v = T+m-k+1$.

كما يمكن التعبير عن هذا التوزيع وصفيًا بالصيغة الآتية [13]

$$\Phi \sim t_{k(kp+1)} \left(\Phi^*, A_2, (H_1^{-1} + (XX'))^{-1}, v \right)$$

وان متوسط التوزيع اللاحق والتباين يعبر عنه بالآتي [14]

$$E(\Phi) = \Phi^* , \quad V(\Phi) = \frac{1}{v-2} \left[(H_1^{-1} + (XX'))^{-1} \otimes A_2 \right] , v > 2$$

وليجاد التوزيع الحدي اللاحق الكامل غير المشروط لمصفوفة التباين المشترك (Σ) نكامل المعادلة (24) نسبة للمصفوفة (Φ) والمتغير (τ) على الترتيب نحصل على :

$$P(\Sigma|Y) = \frac{|A_2|^{\frac{k(T+m)}{2}} \left(\frac{\lambda}{\Psi} \right)^{\frac{k(T+m)}{4}} K_{2v-k(T+m)} \left(\sqrt{\lambda \Psi \left(1 + \frac{\text{tr} \Sigma^{-1} A_2}{\Psi} \right)} \right) \left(1 + \frac{\text{tr} \Sigma^{-1} A_2}{\Psi} \right)^{\frac{2v-k(T+m)}{4}}}{|\Sigma|^{\frac{T+m+k+1}{2}} (2)^{\frac{k(T+m)}{2}} \Gamma_k \left(\frac{T+m}{2} \right) K_v(\sqrt{\lambda \Psi})} \dots (28)$$

من المعادلة (28) نلاحظ ان التوزيع الحدي اللاحق الكامل غير المشروط لمصفوفة التباين المشترك (Σ) ليس من التوزيعات الاحتمالية الشائعة لذلك سيتم ايجاد مقدر بيز الحدي للمصفوفة (Σ) كآتي :

$$E(\Sigma|Y) = E_{\tau} E_{\Sigma}(\Sigma|Y, \tau) = \hat{\Sigma}_B$$

$$\hat{\Sigma}_B = E_{\tau} \left(\frac{A_2 \tau^{-1}}{T+m-k-1} \right)$$

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{A_2 \left(\frac{\lambda}{\Psi} \right)^{\frac{1}{2}} K_{v-1}(\sqrt{\lambda \Psi})}{(T+m-k-1) K_v(\sqrt{\lambda \Psi})} \dots (29)$$

(4) اختبار الفرضيات البيزية لنموذج VAR(P):

يستخدم معيار عامل بيز ((Bayes Factor (BF)) في اختبار الفرضيات البيزية ويعرف على انه النسبة بين فرضيتين احصائيتين هما العدم H_0 والبديلة H_1 ، يمثل حاصل قسمة الاحتمالات اللاحقة الى الاولى بالنسبة لفرضية العدم H_0 مقسوماً على حاصل قسمة الاحتمالات اللاحقة الى الاولى بالنسبة للفرضية البديلة H_1 ، صيغته هي [15]:

$$BF = \frac{p(y|H_0)}{p(y|H_1)} \quad \dots (30)$$

لغرض اختبار الفرضية حول مصفوفة المعلمات (Φ) المعرفة بالآتي

$$H_0 : \Phi = \Phi_0, \Sigma > 0$$

$$H_1 : \Phi \neq \Phi_0, \Sigma > 0$$

بالرجوع للمعادلة (30) يعبر عن عامل بيز بالصيغة الآتية:

$$BF = \frac{\int_{\tau} \int_{\Sigma} f(Y|\Phi, \Sigma, \tau) p(\tau) p(\Sigma|\tau) d\Sigma d\tau}{\int_{\tau} \int_{\Sigma} \int_{\Phi} f(Y|\Phi, \Sigma, \tau) p(\tau) p(\Sigma|\tau) p(\Phi|\Sigma, \tau) d\Phi d\Sigma d\tau} \quad \dots (31)$$

نمثل البسط بالكمية L_1 التي تمثل حاصل ضرب دالة الامكان لمصفوفة المتغيرات العشوائية Y المشروطة بالمتغير (τ) والتمثلة بالمعادلة (16a) تحت فرضية العدم (H_0) ، التوزيع الاولي لـ (Σ) المشروط بـ (τ) المعرف بالمعادلة (13) ، توزيع معكوس كاوس المعمم المعرف بالمعادلة (6) كالآتي :

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_{\tau} \int_{\Sigma} f(Y|\Phi, \Sigma, \tau) p(\tau) p(\Sigma|\tau) d\Sigma d\tau \\ L_1 &= \int_{\tau} \int_{\Sigma} \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\tau} \sum_{t=1}^T (y_t - \Phi_0 X_t)' \Sigma^{-1} (y_t - \Phi_0 X_t)\right] |A_1|^{\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} A_1\right]}{(2\pi)^{\frac{Tk}{2}} \tau^{\frac{Tk}{2}} |\Sigma|^{\frac{T}{2}}} \cdot \frac{|A_1|^{\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} A_1\right]}{|\Sigma|^{\frac{m+k+1}{2}} \tau^{\frac{km}{2}} \Gamma_k\left(\frac{m}{2}\right)} p(\tau) d\Sigma d\tau \\ \Rightarrow L_1 &= \frac{|A_1|^{\frac{m}{2}} \Gamma_k\left(\frac{T+m}{2}\right)}{(\pi)^{\frac{Tk}{2}} \Gamma_k\left(\frac{m}{2}\right) |A_1 + (Y - \Phi_0 X)(Y - \Phi_0 X)'|^{\frac{T+m}{2}}} \quad \dots (32) \end{aligned}$$

وينفس الاسلوب نمثل المقام للمعادلة (31) بالكمية (L_2) لاجاد مقام عامل بيز تحت الفرضية البديلة (H_1) كالآتي:

$$L_2 = \int_{\tau} \int_{\Sigma} \int_{\Phi} f(Y|\Phi, \Sigma, \tau) p(\tau) p(\Sigma|\tau) p(\Phi|\Sigma, \tau) d\Phi d\Sigma d\tau$$

اذ نعوض دالة الترحيح بالصيغة المعرفة في المعادلة (16b) تحت الفرضية البديلة (H_1) ، التوزيع الاولي للمصفوفة (Φ) المشروط بـ (Σ, τ) المعرف بالمعادلة (12) ، التوزيع الاولي لـ (Σ) المشروط بـ (τ) المعرف بالمعادلة (13) ، توزيع معكوس كاوس المعمم المعرف بالمعادلة (6) كالآتي:

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_{\tau} \int_{\Sigma} \frac{|A_1|^{\frac{m}{2}} \tau^{\frac{km}{2}} |\Sigma|^{\frac{m+k+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K(T+Kp+1)}{2}} (\tau)^{\frac{K(T+Kp+1)}{2}} |\Sigma|^{\frac{T+Kp+1}{2}} \Gamma_k\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \left\{ A_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (Y - \bar{\Phi} X)(Y - \bar{\Phi} X)'\right\}\right] \int_{\Phi} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \left\{ (\Phi - \Phi_1) H_1^{-1} (\Phi - \Phi_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\Phi - \bar{\Phi}) X X' (\Phi - \bar{\Phi})'\right\}\right] P(\tau) d\Sigma d\tau \quad \dots (33) \end{aligned}$$

نحول المصفوفات في الدالة الاسية الثانية للمعادلة (33) الى صيغة Vector operator وذلك لتسهيل العمليات الجبرية وكالآتي :

$$\text{Let } Q = \text{tr} \Sigma^{-1} \left\{ (\Phi - \Phi_1) H_1^{-1} (\Phi - \Phi_1) + (\Phi - \bar{\Phi}) X X' (\Phi - \bar{\Phi})' \right\}$$

$$Q = (\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi_1)'(H_1 \otimes \Sigma)^{-1}(\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi_1) + (\text{vec}\Phi - \text{vec}\tilde{\Phi})'((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1}(\text{vec}\Phi - \text{vec}\tilde{\Phi}) \quad \dots (34)$$

نشبه الشكل التربيعي في المعادلة (34) بالشكل التربيعي المعروف في المعادلة (20) ، واجراء نفس العمليات الجبرية الى ان نتوصل الى الصيغة في المعادلة (21) ثم نعوض قيمة المتجه (c) من المعادلة (21) في المعادلة (34) .

$$\therefore Q = \left\{ (\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi^*)'D(\text{vec}\Phi - \text{vec}\Phi^*) + (\text{vec}\Phi_1 - \text{vec}\tilde{\Phi})'[(H_1 \otimes \Sigma) + ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)]^{-1}(\text{vec}\Phi_1 - \text{vec}\tilde{\Phi}) \right\} \dots (35)$$

وبارجاع (Q) في المعادلة (35) الى صيغة المصفوفات نحصل على :

$$Q = \left\{ (\Phi - \Phi^*)(H_1^{-1} + (XX')) \otimes \Sigma^{-1}(\Phi - \Phi^*)' + (\Phi_1 - \tilde{\Phi})[H_1 + (XX')^{-1}]^{-1} \otimes \Sigma^{-1}(\Phi_1 - \tilde{\Phi})' \right\}$$

اذ ان

$$D = (H_1 \otimes \Sigma)^{-1} + ((XX')^{-1} \otimes \Sigma)^{-1} = (H_1^{-1} + (XX')) \otimes \Sigma^{-1}$$

$$[(H_1 \otimes \Sigma) + (XX')^{-1} \otimes \Sigma]^{-1} = (H_1 + (XX')^{-1})^{-1} \otimes \Sigma^{-1}$$

$$Q = \text{tr} \Sigma^{-1} \left\{ (\Phi - \Phi^*)(H_1^{-1} + (XX'))(\Phi - \Phi^*)' + (\Phi_1 - \tilde{\Phi})[H_1 + (XX')^{-1}]^{-1}(\Phi_1 - \tilde{\Phi})' \right\} \quad \dots (36)$$

نعوض المعادلة (36) في اس الدالة الاسية الثانية للمعادلة (33) واجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على:

$$L_2 = \int_{\tau} \int_{\Sigma} \frac{|A_1|^{\frac{m}{2}} \tau^{-\frac{k(\Gamma+m)}{2}} |\Sigma|^{-\frac{\Gamma+m+k+1}{2}} P(\tau)}{(2\pi)^{\frac{k\Gamma}{2}} 2^{\frac{km}{2}} \Gamma_k\left(\frac{m}{2}\right) |H_1^{-1} + (XX')|^{\frac{k}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \left\{ A_1 + (Y - \tilde{\Phi}X)(Y - \tilde{\Phi}X)' + (\Phi_1 - \tilde{\Phi})[H_1 + (XX')^{-1}]^{-1}(\Phi_1 - \tilde{\Phi})' \right\} \right] d\Sigma d\tau$$

وباجراء التكامل نسبة ل Σ و τ على الترتيب نحصل على:

$$L_2 = \frac{|A_1|^{\frac{m}{2}} \Gamma_k\left(\frac{\Gamma+m}{2}\right) \left| A_1 + (Y - \tilde{\Phi}X)(Y - \tilde{\Phi}X)' + (\Phi_1 - \tilde{\Phi})[H_1 + (XX')^{-1}]^{-1}(\Phi_1 - \tilde{\Phi})' \right|^{\frac{\Gamma+m}{2}}}{(\pi)^{\frac{k\Gamma}{2}} \Gamma_k\left(\frac{m}{2}\right) |H_1^{-1} + (XX')|^{\frac{k}{2}}} \quad \dots (37)$$

بقسمة المعادلة (32) على المعادلة (37) نحصل على عامل بيز كالاتي :

$$BF = \frac{\left| A_1 + (Y - \tilde{\Phi}X)(Y - \tilde{\Phi}X)' + (\Phi_1 - \tilde{\Phi})[H_1 + (XX')^{-1}]^{-1}(\Phi_1 - \tilde{\Phi})' \right|^{\frac{\Gamma+m}{2}}}{\left| A_1 + (Y - \Phi_0X)(Y - \Phi_0X)' \right|^{\frac{\Gamma+m}{2}}} \quad \dots (38)$$

يتم اتخاذ القرار حول الفرضيات بالرجوع الى الجدول الذي قدمه جيفريز [16] الذي يوضح فيه الافضلية لمصلحة الفرضية (H_0) من عدمها ولعدة حالات بالاعتماد على قيمة عامل بيز المحسوبة من المعادلة (38).

(5)التوزيع التنبؤي Predictive distribution

إذا توفرت لدينا المشاهدة المستقبلية $(T + i)$ لجميع المتغيرات (السلاسل الزمنية) والتي تمثل بالمتجه (y_{T+i}) فان نموذج متجه الانحدار الذاتي لهذه المشاهدة هو:

$$y_{T+i} = \Phi x_{T+i} + u_{T+i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (39)$$

اذ ان

y_{T+i} : متجه المشاهدة المستقبلية (i) ذات بعد $(k \times 1)$.

Φ : مصفوفة المعلمات ذات بعد $(k \times (kp+1))$.

x_{T+i} : متجه ذات بعد $((kp+1) \times 1)$.

u_{T+i} : متجه الاخطاء العشوائية المستقبلية ذات بعد $(k \times 1)$.

حيث ان (u_{T+i}) يتبع توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم بالمعلمات $(\theta, \Sigma, \lambda, \psi, \nu)$ ، نعلم ان (y_{T+i}) هوتركيبة خطية من (u_{T+i}) ولذلك فان (y_{T+i}) يتبع توزيع Bessel متعدد المتغيرات المحور المعمم بالمعلمات $(\Phi x_{T+i}, \Sigma, \lambda, \psi, \nu)$.

باستخدام نظرية بيز فان التوزيع التنبؤي للمتجه (y_{T+i}) يعرف بالصيغة الآتية [17]:

$$f(y_{T+i}|Y) = \int_{\Sigma} \int_{\Phi} f(y_{T+i}|\Phi, \Sigma) P(\Phi, \Sigma|Y) d\Phi d\Sigma \quad \dots (40)$$

نظراً لصعوبة ايجاد التوزيع في المعادلة (40) نستخدم مفهوم التوزيعات الخليطة ، اي التوزيعات المشروطة بالمتغير العشوائي τ :

$$f(y_{T+i}|\Phi, \Sigma, \tau) \sim N_k(\Phi x_{T+i}, \tau \Sigma)$$

$$f(y_{T+i}|\Phi, \Sigma, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} (y_{T+i} - \Phi x_{T+i})(y_{T+i} - \Phi x_{T+i})' \right] \quad \dots (41)$$

$$P(\Phi, \Sigma|Y, \tau) \propto |\Sigma|^{-\frac{m_0+k+1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} A_2 \right]$$

$$|\Sigma|^{-\frac{kp+1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} (\Phi - \tilde{\Phi}_B) H^{-1} (\Phi - \tilde{\Phi}_B)' \right] \quad \dots (42)$$

بتعويض المعادلتين (41) و (42) في المعادلة (40) نحصل على :

$$f(y_{T+i}|Y, \tau) \propto \int_{\Sigma} |\Sigma|^{-\frac{m_0+kp+k+3}{2}} \int_{\Phi} \exp \left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \{ A_2 + (y_{T+i} - \Phi x_{T+i})(y_{T+i} - \Phi x_{T+i})' + (\Phi - \tilde{\Phi}_B) H^{-1} (\Phi - \tilde{\Phi}_B)' \} \right] d\Phi d\Sigma \quad \dots (43)$$

$$\text{Let } Q = (y_{T+i} - \Phi x_{T+i})(y_{T+i} - \Phi x_{T+i})' + (\Phi - \tilde{\Phi}_B) H^{-1} (\Phi - \tilde{\Phi}_B)'$$

بإضافة وطرح $\tilde{\Phi}_B x_{T+i}$ الى قوسي الحد الاول من (Q) واجراء بعض العمليات الجبرية نحصل على :

$$Q = (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})(1 + x_{T+i}' D_1^{-1} x_{T+i})(y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})'$$

$$+ [\Phi - (\tilde{\Phi}_B + D_2)] D_1 [\Phi - (\tilde{\Phi}_B + D_2)]'$$

اذ ان

$$D_1 = x_{T+i} x_{T+i}' + H^{-1}$$

$$D_2 = (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i}) x'_{T+i} D_1^{-1}$$

$$\therefore f(y_{T+i}|Y, \tau) \propto \int_{\Sigma} |\Sigma|^{-\frac{m_2+k+kp+3}{2}} \int_{\Phi} \exp\left[-\frac{1}{2\tau} \text{tr} \Sigma^{-1} \left\{ A_2 + (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})(1 - x'_{T+i} D_1^{-1} x_{T+i})(y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})' + (\Phi - (\tilde{\Phi}_B + D_2)) D_1 (\Phi - (\tilde{\Phi}_B + D_2))' \right\}\right] d\Phi d\Sigma$$

$$\therefore f(y_{T+i}|Y, \tau) \propto \frac{1}{\left| A_2 + (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})(1 - x'_{T+i} D_1^{-1} x_{T+i})(y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})' \right|^{\frac{m_2+1}{2}}}$$

وباستخدام العلاقة الآتية $1 - x'_{T+i}(x_{T+i}x'_{T+i} + H^{-1})^{-1}x_{T+i} = (1 + x'_{T+i}Hx_{T+i})^{-1}$ وإجراء التكامل نسبة لـ (τ) وإجراء بعض العمليات الجبرية تكون صيغة دالة احتمال التوزيع التنبؤي للمتجه (y_{T+i}) غير المشروط هي :

$$f(y_{T+i}|Y) \propto \frac{1}{\left| I_k + A_2^{-1}(y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})(1 + x'_{T+i}Hx_{T+i})^{-1}(y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})' \right|^{\frac{m_2+1}{2}} \dots (44)}$$

وباستخدام الخاصية $|I + uv'| = 1 + u'v$

$$f(y_{T+i}|Y) \propto \frac{1}{\left(1 + \frac{m_1 + 1 - k}{m_1 + 1 - k} (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})' A_2^{-1} (1 + x'_{T+i} H x_{T+i})^{-1} (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i}) \right)^{\frac{m_2+1}{2}} \dots (45)}$$

الطرف الايمن من المعادلة (45) يمثل نواة توزيع t متعدد المتغيرات بدرجة حرية $(m_1 + 1 - k)$ والمعلمات $(\tilde{\Phi}_B x_{T+i})$ و $\left[\frac{((1+x'_{T+i}Hx_{T+i})A_2)}{(m_2+1-k)} \right]$ التوزيع الاحتمالي التنبؤي الكامل لمتجه المشاهدات المستقبلية (y_{T+i}) هو:

$$f(y_{T+i}|Y) = \frac{\Gamma_k\left(\frac{m_1+1}{2}\right) \left(1 + \frac{m_1+1-k}{m_1+1-k} (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i})' ((1+x'_{T+i}Hx_{T+i})A_2)^{-1} (y_{T+i} - \tilde{\Phi}_B x_{T+i}) \right)^{-\frac{m_2+1}{2}}}{[\pi((m_1+1-k))]^{\frac{k}{2}} \Gamma_k\left(\frac{m_1+1-k}{2}\right) \left| \frac{((1+x'_{T+i}Hx_{T+i})A_2)}{(m_1+1-k)} \right|^{\frac{1}{2}}} \dots (46)$$

الوسط الحسابي والتباين للتوزيع التنبؤي يمثلان الصبغ الآتية على الترتيب :

$$E(y_{T+i}|Y) = \tilde{\Phi}_B x_{T+i}$$

$$V(y_{T+i}|Y) = \frac{1}{(m_2-k-1)} [(1 + x'_{T+i} H x_{T+i}) A_2] \quad , \quad m_1 > k + 1$$

يمكن التعبير عن التوزيع التنبؤي وصفيًا بالآتي:

$$y_{T+i} | Y \sim t_{(m_1+1-k)} \left[\hat{\Phi}_B^{x_{T+i}}, \left[\frac{(1 + x'_{T+i} H x_{T+i}) A_2}{(m_1 + 1 - k)} \right], (m_1 + 1 - k) \right]$$

(6) الاستنتاجات :

(1) التوزيع الاحتمالي الحدي اللاحق لمصفوفة المعلمات (Φ) المعروف في المعادلة (27) يتبع توزيع Matrix t بالمعلمات $(\Phi^*, A_2, (H_1^{-1} + (XX'))^{-1})$ ودرجة حرية $= T+m-k+1$. حيث يوصف كالآتي:

$$\Phi \sim t_{k(kp+1)} (\Phi^*, A_2, (H_1^{-1} + (XX'))^{-1}, v)$$

(2) التوزيع الاحتمالي الحدي اللاحق لمصفوفة التباين المشترك (Σ) هو توزيع غير شائع ، وان مقدر بيز للمصفوفة (Σ) المعروف بالمعادلة (29) هو :

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{A_2 \left(\frac{\lambda}{\Psi} \right)^{\frac{1}{2}} K_{v-1}(\sqrt{\lambda\Psi})}{(T + m - k + 1) K_v(\sqrt{\lambda\Psi})}$$

(3) التوزيع الاحتمالي التنبؤي البيزي لمتجه المشاهدة المستقبلية (y_{T+i}) هو توزيع t متعدد المتغيرات بدرجة حرية $(m_1 + 1 - k)$ والمعلمات $(\hat{\Phi}_B^{x_{T+i}})$ و $\left[\frac{(1 + x'_{T+i} H x_{T+i}) A_2}{(m_1 + 1 - k)} \right]$ المعروف بالمعادلة (46).

(7) المصادر

- 1) Ni S. and Sun D., (2003), "Noninformative Priors and Frequentist Risks of Bayesian Estimators of Vector-Autoregressive Models", Journal of Econometrics, 115, PP.159-197.
- 2) Ni S. and Sun D., (2005), " Bayesian Estimates for Vector Autoregressive Models", Journal of Business & Economic Statistics, Vol.23, No.1, PP.105-117.
- 3) Barndorff Nielsen O.,(1978), "Hyperbolic Distributions and Distributions in Hyperbolae", Scand J.Statist. 5 PP.151-157.
- 4) Thabane L. and Haq M. S. ,(2003), " The Generalized Multivariate Modified Bessel Distribution and Its Bayesian Applications", Journal of Statistical sciences ,11, PP. 255-267.
- 5) Malan K.,(2007), "Stationary Multivariate Time Series Analysis", Msc Thesis University of Pretoria, Pretoria, Not Published.
- 6) Mora J. A. and Mata L. M. ,(2013), "Numerical Aspects to Estimate the Generalized Hyperbolic Probability Distribution", Journal of Finance & Economics, Vol.1, Issue 4, PP. 1-9.
- 7) Lemonte A. J. and Cordeiro G. M. ,(2011), "The Exponentiated Generalized Inverse Gaussian Distributions", Statistics and probability letters 81, pp. 506-517.
- 8) Thabane L. and Drekcic S. ,(2004), "Discrimination Between Two Generalized Multivariate Modified Bessel Populations", International Journal of Statistical sciences, Vol. 3 (Special Issue), PP. 209-219.
- 9) Thabane L. and Drekcic S. ,(2001), " Hypothesis Testing for the Generalized Multivariate Modified Bessel Model", Journal of Multivariate Analysis,86, PP328-335.
- 10) Kim H. and Genton M. G.,(2011), "Characteristic Functions of Scale Mixture of Multivariate Skew-Normal Distributions", Journal of Multivariate Analysis", 102, PP. 1105-1117.
- 11) سعيد، هيفاء عبدالجواد والعيدي ، سرمد عبدالخالق،(2014)، "التحليل البيزي لمعلمات نموذج انحدار Bessel المحور المعمم الخطي المتعدد"، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (26) ص ص (98-116).
- 12) Box G. P. and Tiao G. C. ,(1973), "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Addison-wesley publishing company ,Inc. London, U.K.
- 13) Rahman A.,(2009), "Objective Bayesian Prediction for the Matrix-T Error Regression Model", Paper presented at the 2009 International workshop on objective Bayes Methodology(O-Bayes09), The Wharton school of the university of Pennsylvania, Philadelphia USA, (5-9 June 2009).
- 14) Kibria B. M. G.,(2006), "The Matrix-t Distribution and Its Applications in Predictive Inference", Journal of Multivariate Analysis, 97, PP.785-795.
- 15) Kleibergen F. and Paap R.,(2002), "Priors, Posteriors and Bayes Factors for Bayesian Analysis of Cointegration", Journal of Econometrics, 111, PP. 223-249.
- 16) Jeffreys, H.,(1961), "Theory of probability", Clarendon Press, Oxford, London U.K.
- 17) Canova, F. and Ciccarelli, M., (2004),"Forecasting and Yurning Point Predictions in a Bayesian Panel VAR Model", Journal of Econometrics, 120, PP.327-359.