تقدير E البيزي لمعلمات توزيع Frechet مع التطبيق

E-Bayesian estimation for parameters of Frechet Distribution with application

اياد صبري فنيخر أ.م. د. هيفاء عبد الجواد سعيد

ayadsabri2020@gmail.com

كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 30 / 9 /2020 تاريخ قبول النشر 26 / 11 /2020 تاريخ النشر 3/24 /2021

المستخلص:

تم في هذا البحث تقدير معلمة الشكل و القياس لتوزيع فريجت باستخدام اسلوب E- بيز واسلوب بيز تحت دالة الخسارة التربيعية وبافتراض توزيعات اولية وفوقية مختلفة لمعلمتي الشكل والقياس ،اذ تم اجراء المقارنة بين اسلوب E- بيز واسلوب بيز من خلال معيار دالة المخاطرة التربيعية ،ومن التطبيق على بيانات تجريبية وحقيقية استنتجنا ان اسلوب E- بيز افضل من اسلوب بيز.

الكلمات المفتاحية : *اسلوب بيز الاعتيادي ، اسلوب E البيزي ،دالة الخسارة التربيعية*

Abstract:

In this paper the shape and scale parameter of frechet distribution estimated by using E-Bayesian technique and Bayesian technique ,under squared error loss function ,and assuming different prior and hyperprior distributions for the two shape and scale parameter , as it has been a comparison between the E-Bayesian technique and Bayesian technique by the squared risk function ,and from the application on experimental and real data We concluded that the E-Bayesian better than the Bayesian.

***Key words** : Ordinary Bayesian technique ,E-Bayesian technique , Quadratic loss function*

المقدمة:

بهدف الحصول على مقدر مناسب لمعلمات اي توزيع احتمالي يتم ذلك من خلال استخدام طرق واساليب جديدة تكون اكثر دقة من الطرق السابقة التي قد تكون اقل دقة وكفاءة من الطرق الحديثة، فقد تناول هذا البحث استخدام اسلوب Expected-Bayesian ويرمز له اختصاراً E-Bayesian لتقدير معلمات توزيع فريجت وقد تم اقتراح هذا الاسلوب من قبل (Han.2006) لتقدير احتمال الفشل failure probability، حيث يعد هذا الاسلوب تطوير لأسلوب Bayesian يتمثل الاسلوب الجديد بأخذ التوقع للمقدر بأسلوب Bayesian نسبة الى التوزيع الفوقي لمعلمة التوزيع الاولي ، و قام العديد من الباحثين باستخدام اسلوب E-Bayesian ،فقد طبق (Yin and Liu.2010) اسلوب E-Bayesian واسلوب Bayesian لتقدير دالة الموثوقية للتوزيع الهندسي تحت دالة الخسارة التربيعية في حالة العينات الكاملة ، كما قدر الباحثان (Jaheen and Okasha.2011) معلمة ودالة الموثوقية لتوزيع Burr-XII باستخدام اسلوب E-Bayesian و اسلوب Bayesian وتحت دالة خسارة LINEX ، ودرس (Reyad and Othman.2016) اسلوب E-Bayesian و Bayesian لتقدير معلمة الشكل لتوزيع Kumaraswamy لبيانات غير كاملة من النوع الثاني تحت دوال خسارة متماثلة وغير متماثلة ، وقام (Gupta.2017) بتقدير معلمة توزيع Rayliegh باستخدام اسلوب E-Bayesian و اسلوب Bayesian تحت دالة خسارة LINEX .

هدف البحث: يهدف البحث الى ايجاد اسلوب جديد لتقدير المعلمات من خلال افتراض ان معلمات التوزيع المدروس تتبع توزيعات اخرى يتم من خلالها الحصول على مقدرات للمعلمات بأقل مخاطرة بيزية.

مشكلة الدراسة : تكمن مشكلة الدراسة بأن بعض طرق تقدير المعلمات تكون غير دقيقة في ايجاد المقدر للمعلمة.

فرضية البحث : تفترض الدراسة ان استخدام توزيعات اولية وفوقية جديدة لمعلمات توزيع فريجت تؤدي الى تقليل دالة المخاطرة التربيعية اللاحقة والحصول على مقدر اكثر دقة وكفاءة للمعلمات .

منهج البحث : تم في هذا البحث استخدام بيانات تجريبية تم توليدها باستخدام لغة ماتلاب وبيانات حقيقية ، و بالاعتماد على المصادر والمراجع.

هيكلية البحث : لغرض تحقيق فرضية البحث فقد تم تقسيم البحث الى عدة فقرات تضمنت الفقرة الاولى دراسة توزيع فريجت وتناولت الفقرة الثانية تقدير معلمتي الشكل و القياس عندما تكون احدى المعلمتين غير معلومة والاخرى معلومة وكذلك عندما تكون المعلمتين غير معلومة بأسلوب E-Bayesian و اسلوب Bayesian و تضمنت الفقرة الثالثة الجانب التجريبي حيث تم توليد بيانات عشوائية تتبع توزيع فريجت والفقرة الرابعة تضمنت الجانب التطبيقي وتمت المقارنة بين اسلوب E-Bayesian و اسلوب Bayesian تحت دالة الخسارة التربيعية.

1.توزيع Frechet:

قدم توزيع فريجت لأول مرة من قبل عالم الرياضيات الفرنسي Maurice Frechet (1878-1973) الذي حدد احد حدود التوزيع لأكبر إحصاءه مرتبة عام (1927) ويعتبر توزيع فريجت من التوزيعات الاحتمالية المستمرة ومن التوزيعات ذات الذيول الثقيلة (heavy tails). وله استخدامات على نطاق واسع في التطبيقات التي تنطوي على ظواهر عشوائية مثل هطول الامطار وسرعة الرياح و تلوث الهواء و الفيضانات و يستخدم في تحليل الاشارات الضوئية و اختبارات الحياة و دراسة السلوك الاحصائي لخواص المواد في المجالات الهندسية (Harlow,2002).

إذا كان المتغير العشوائي $x \sim Frech\ (\alpha, \beta)$ تكون دالة كثافة الاحتمال معرفة كما في المعادلة التالية:

$$f(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \alpha\beta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}} & x\ ,\alpha\ ,\beta > 0 \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad \dots \quad (1)$$

حيث ان α تمثل معلمة الشكل بينما تمثل β معلمة القياس

وان الدالة التراكمية لتوزيع فريجت تعرف كما في الصيغة التالية:

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}} \qquad x > 0$$

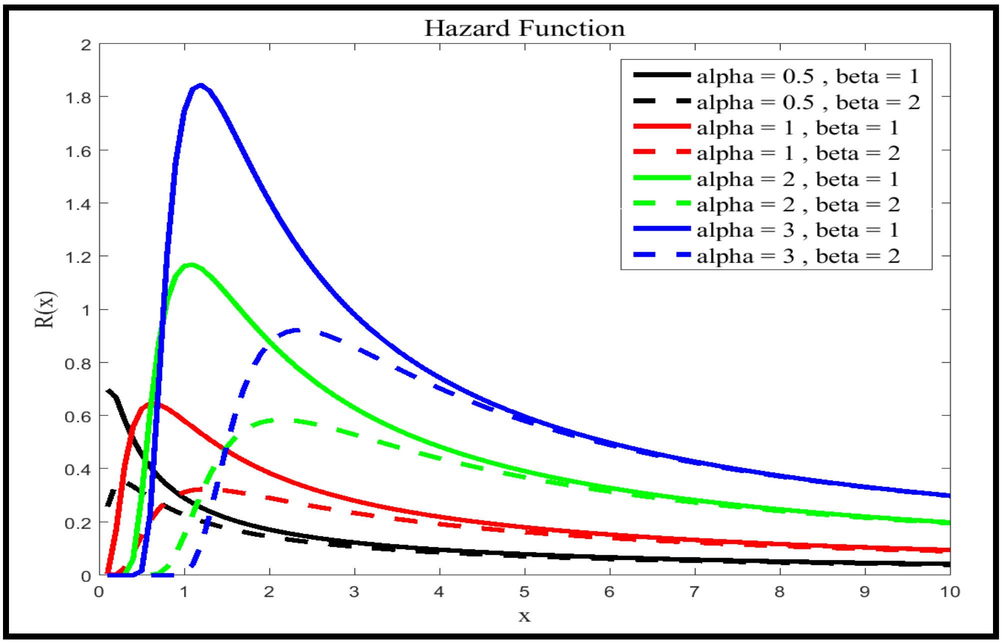
وان دالة البقاء لتوزيع فريجت معرفة كما في الصيغة التالية:

$$S(x) = 1 - F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}$$

ودالة معدل الفشل hazard function لتوزيع فريجت بالصيغة التالية:

$$h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{\alpha\beta^{\alpha}x^{-(\alpha+1)}e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}{1 - e^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}}}$$

والشكل الآتي يوضح رسم دالة معدل الفشل



دالة معدل الفشل لتوزيع فريجت الاحتمالي لقيم مختلفة من α و β

نلاحظ من منحنى دالة معدل الفشل في الشكل اعلاه ان دالة معدل الفشل عند (α=0.5,β=1) تكون دالة متناقصة وبزيادة قيمة معلمة الشكل يكون منحنى دالة معدل الفشل اكثر تزايدا ونلاحظ ايضاً عند زيادة قيمة معلمة القياس فإن منحنى دالة معدل الفشل يكون اقل تزايداً.

2.اسلوب E البيزي

سوف يتم في هذه الفقرة تقدير معلمتي الشكل و القياس لتوزيع فريجت تحت دالة خسارة تربيعية في الحالات الآتية

2-1. تقدير معلمة الشكل αعندما تكون معلمة القياس β معلومة:

بتوفير n من مشاهدات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع الذي يتبع توزيع فرجت المعرف في المعادلة (1) اعلاه تكون دالة الامكان لتوزيع كالآتي:

$$L(\alpha) \propto \alpha^n e^{n\alpha \ln \beta} e^{-\alpha \ln X_i} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{X_i}\right)^{\alpha}} \qquad \dots(2)$$

وباستخدام مفكوك تايلر للحد $g_i(\alpha) = \left(\frac{\beta}{X_i}\right)^{\alpha}$ في المعادلة (3) لغاية الرتبة الاولى عند $\alpha_0 = 1$ نحصل على

$$g_i(\alpha) \cong \left(\frac{\beta}{X_i}\right) + (\alpha - 1)\left(\frac{\beta}{X_i}\right)\ln\left(\frac{\beta}{X_i}\right) \qquad \dots(3)$$

وبتعويض $g_i(\alpha)$ المعرفة في المعادلة (3) في $L(\alpha)$ المعرفة في المعادلة (2) وبعد اجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على

$$L(\alpha) = \alpha^n e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - n\ln(\beta) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{X_i}\right)\ln\left(\frac{\beta}{X_i}\right)\right]} \qquad \dots(4)$$

واستخدمت دالة كثافة الاحتمال الاولية لمعلمة الشكل α توزيع دالة القوى الذي اقترحه (Reyad et al ,2016) ويعرف بالصيغة الآتية

$$P(\alpha) = b\alpha^{b-1} \qquad 0 < \alpha < 1 \quad ,0 < b \qquad \dots(5)$$

ومن خلال دمج المعادلتين (4) و (5) يكون التوزيع اللاحق كالآتي:

$$P(\alpha|x_1,x_2,\dots x_n) \propto \alpha^{n+b-1}e^{-\alpha[Z]}$$

والذي يمثل نواة توزيع كاما $Gamma(n+b\ ,Z)$ فيكون التوزيع اللاحق الكامل التقريبي كما في الصيغة التالية:

$$P(\alpha|x_1,x_2,\dots x_n) \cong \frac{[Z]^{n+b}}{\Gamma(n+b)}\ \alpha^{n+b-1}e^{-\alpha[Z]}$$

حيث ان

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\ln X_i - n\ln(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{X_i}\right)\ln\left(\frac{\beta}{X_i}\right)$$

وان مقدر بيز لـ α تحت دالة الخسارة التربيعية الذي يمثل التوقع للتوزيع اللاحق يكون كالآتي

$$\hat{\alpha}_{Bayes_1}=\frac{(n+b)}{[Z]} \qquad \dots (5)$$

ولإيجاد تقدير α باستخدام بأسوب E- بيز نفرض ان معلمة التوزيع الاولي b تتبع توزيع كاما وحسب العلاقة

$$b\sim Gamma\ (k,r)$$

أي أن:

$$P(b)=\frac{r^k}{\Gamma(k)}b^{k-1}e^{-br} \qquad \dots (6)$$

حيث ان (0<r,k)

ويجب اختيار قيم معلمات التوزيع الاولي k و r بالشكل الذي يضمن ان دالة التوزيع الاولي $P(b)$ تكون دالة متناقصة نسبة الى معلمة التوزيع الاولي b وكالآتي

نشتق المعادلة (6) نسبة الى b

$$\frac{\partial[P(b)]}{\partial b}=\frac{r^k}{\Gamma(k)}[b^{k-1}e^{-br}(-r)+e^{-br}b^{k-2}(k-1)\,]$$

حيث ان 0< k <1 و 0<r تحقق $\frac{dP(b)}{db}<0$ فإن الدالة P(b) تكون دالة متناقصة نسبة الى b (Okasha.2014)

نأخذ التوقع لمقدر بيز في المعادلة (5) نسبة الى b في المعادلة (6) وكالآتي

$$\hat{\alpha}_{E-Bayes_1}=\int_0^{\infty}\left(\frac{(n+b)}{[Z]}\right)*\frac{r^k}{\Gamma(k)}b^{k-1}e^{-br}db$$

$$\hat{\alpha}_{E-Bayes_1}=\frac{n}{[Z]}+\int_0^{\infty}\frac{r^k}{\Gamma(k)}\ b^{k+1-1}e^{-br}db$$

$$\hat{\alpha}_{E-Bayes_1}=\frac{n}{[Z]}+\frac{k}{r[Z]} \qquad \dots (7)$$

واختار الباحثان توزيع اولي اخر لمعلمة الشكل والموصوف ب

$$\alpha\sim Gamma(\delta,\gamma)$$

$$P(\alpha)=\frac{\gamma^{\delta}}{\Gamma(\delta)}\ \alpha^{\delta-1}\ e^{-\gamma\alpha} \qquad 0<\ \ \delta<1\ \ ,0<\gamma \qquad \dots (8)$$

ومن دمج دالة الامكان في المعادلة (3) مع التوزيع الاولي في المعادلة (8) نحصل على التوزيع اللاحق كما في الصيغة ادناه

$$P(\alpha|x_1,x_2,\dots x_n) \propto \alpha^{n+\delta-1}\, e^{-\alpha[Z+\gamma]}$$

اذ ان التوزيع اعلاه يمثل نواة توزيع كاما الموصوف ب

$$Gamma(n+\delta, Z+\gamma)$$

ويعبر عن التوزيع اللاحق الكامل التقريبي بالشكل الاتي

$$P(\alpha|x_1,x_2,\dots x_n) \cong \frac{[Z+\gamma]^{n+\delta}}{\Gamma(n+\delta)}\alpha^{n+\delta-1}\, e^{-\alpha[Z+\gamma]}$$

وتحت دالة الخسارة التربيعية يكون مقدر بيز بالصيغة الاتية

$$\hat{\alpha}_{Bays2} \cong \frac{n+\delta}{[Z+\gamma]} \qquad \dots (9)$$

نفرض ان معلمتي التوزيع الاولي δ, γ مستقلتين وتتبعان التوزيع المنتظم الموصوف بـ

$$\delta \sim uniform\,(0,1) \qquad ; \quad \gamma \sim uniform(0,c)$$

والتوزيع الاولي المشترك للمعلمتين الفوقية يكون كالآتي

$$P(\delta,\gamma) = P(\delta)P(\gamma)$$

$$P(\delta,\gamma) = \frac{1}{c} \qquad ; 0 < \gamma < c_0\, ; 0 < \delta < 1 \qquad \dots (10)$$

اذ ان c ثابت موجب

وبإخذ التوقع لمقدر بيز في المعادلة (9) نسبة الى التوزيع الفوقي المشترك في المعادلة (10) نحصل على مقدر α بطريقة E− بيز كما في الصيغة الاتية

$$\hat{\alpha}_{E-Bays2} = \frac{2n+1}{2c} * \ln\left[1+\frac{c}{Z}\right] \qquad \dots (11)$$

2−2. تقدير β عندما α معلومة

بتوفير n من مشاهدات العينة العشوائية تكون دالة الامكان كالآتي:

$$L(\beta) \propto \beta^{n\alpha} e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{x_i}\right)^{\alpha}} \qquad \dots (12)$$

وباستخدام مفكوك تايلر للحد $g(\beta) = \left(\frac{\beta}{x_i}\right)^{\alpha}$ ولغاية الرتبة الاولى عند $\beta_0 = 1$ تكون $g(\beta)$ كالآتي

$$g(\beta) \cong \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha} + (\beta-1)\alpha\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha} \qquad \dots (13)$$

بتعويض $g(\beta)$ المعرفة في المعادلة (13) في المعادلة (12) واجراء العمليات الرياضية نحصل على

$$L(\beta) = \beta^{n\alpha} e^{-\beta\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha}} \qquad \dots (14)$$

واستخدمت دالة كثافة الاحتمال الاولية لمعلمة القياس (β) التي اقترحها (Reyad et al,2016) وهي توزيع دالة القوى المعرف بالصيغة الآتية

$$P(\beta) = a\, \beta^{a-1} \qquad \dots (15)$$

ومن دمج المعادلتين (14) و (15) يكون التوزيع اللاحق الكامل التقريبي كالآتي:

$$P(\beta|x_1,x_2,\dots x_n) \propto \beta^{n\alpha+a-1} e^{-\sum_{i=1}^{n}(\frac{\beta}{x_i})^{\alpha}}$$

وتكون صيغة التوزيع اللاحق الكامل التقريبي كالتالي:

$$P(B|x_1,x_2,\dots x_n) \cong \frac{\left[\alpha\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{X_i})^{\alpha}\right]^{n\alpha+a}}{\Gamma(n\alpha+a)} \beta^{n\alpha+a-1} e^{-\beta\alpha\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{x_i})^{\alpha}}$$

وان مقدر بيز تحت دالة الخسارة التربيعية التي تمثل التوقع للتوزيع اللاحق يكون كالآتي

$$\hat{\beta}_{Bayes_1} \cong \frac{n\alpha+a}{\alpha\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{X_i})^{\alpha}} \quad \dots (16)$$

ولإيجاد مقدر β باستخدام طريقة E- بيز نفرض ان معلمة التوزيع الاولي a تتبع توزيع كاما

$$a \sim Gamma(t,s)$$

$$P(a) = \frac{s^t}{\Gamma(t)} a^{t-1} e^{-as} \qquad a,t,s > 0$$

$$\hat{B}_{E-Bayes_1} = \left[\int_0^{\infty}\left(\frac{n\alpha+a}{\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{X_i}\right)^{\alpha}}\right) * \frac{s^t}{\Gamma(t)} a^{t-1} e^{-as} da\right]$$

$$\hat{B}_{E-Bayes_1} = \frac{n\alpha}{\left[\alpha\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{X_i})^{\alpha}\right]} + \frac{t}{\left[\alpha\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{X_i})^{\alpha}\right]*s} \quad \dots (17)$$

وفي حال كان التوزيع الاولي لمعلمة القياس β توزيع كاما الاتي

$$\beta \sim Gamma(\omega,\tau)$$

$$P(\beta) = \frac{\tau^{\omega}}{\Gamma(\omega)} \beta^{w-1} e^{-\tau\beta} \quad ;0<\tau\,;0<\omega<1$$

فإن مقدر بيز يكون بالصيغة الاتية

$$\hat{\beta}_{Bays_2} = \frac{(n\alpha+\omega)}{\left[\tau+\alpha\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)^{\alpha}\right]} \quad \dots (18)$$

نفرض ان معلمتي التوزيع الاولي ω,τ مستقلتان وتتبعان التوزيع المنتظم الموصوف بـ

$$\omega \sim u(0,1) \qquad ; \ \tau \sim u(0,c)$$

والتوزيع الاولي المشترك للمعلمتين الفوقية يكون كالآتي

$$P(\omega,\tau) = \frac{1}{c} \qquad ,0<\tau<c \quad ;\ 0<\omega<1 \quad \dots (19)$$

ونوجد المقدر لـ β بطريقة E– بيز بأخذ التوقع لمقدر بيز في المعادلة (16) نسبة الى التوزيع الفوقي لمعلمة التوزيع الاولي في المعادلة (17) وبذلك يكون مقدر β بأسلوب E–بيز بالصيغة الآتية

$$\hat{\beta}_{E-Bays_2} = \frac{2n\alpha+1}{2c}\ln\left[1+\frac{c}{\alpha\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{X_i})^{\alpha}}\right] \quad \ldots(20)$$

2-3. عندما α و β غير معلومة

بتوفر n من مشاهدات العينة المسحوبة من توزيع Fr تكون دالة الامكان كالآتي

$$L(\alpha,\beta) = \alpha^n\beta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^{-(\alpha+1)}\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B}{X_i}\right)^{\alpha}} \quad \ldots(21)$$

نفرض التوزيع الاولي لكل من α و β توزيع دالة القوى المعرف لكل من المعلمتين على التوالي كالآتي

$$P(\alpha) = b_v\alpha^{b_v-1}$$
$$P(\beta) = a_v\beta^{a_v-1}$$

وبفرض ان α و β مستقلين ويكون التوزيع الاولي المشترك كما في الصيغة الاتية

$$P(\alpha,\beta) = a_v b_v \alpha^{b_v-1}\beta^{a_v-1} \quad \ldots(22)$$

ويكون التوزيع اللاحق كالآتـي

$$P(\alpha,\beta|x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{L(\alpha,\beta)P(\alpha,\beta)}{\int_{\forall\beta}\int_{\forall\alpha} L(\alpha,\beta)P(\alpha,\beta)d\alpha\, d\beta}$$

$$P(\alpha,\beta|x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\alpha^{n+b_v-1}\beta^{n\alpha+a_v-1}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^{-(\alpha+1)}\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B}{X_i}\right)^{\alpha}}}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{n+b_v-1}\beta^{n\alpha+a_v-1}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^{-(\alpha+1)}\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B}{X_i}\right)^{\alpha}}d\alpha\, d\beta}$$

وتحت دالة الخسارة التربيعية تكون صيغة المقدر لكل من α وβ كالآتي

$$E(\alpha,\beta|x_1,x_2,\ldots x_n) = \frac{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u(\alpha,\beta)\alpha^{n+b_v-1}\beta^{n\alpha+a_v-1}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^{-(\alpha+1)}\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B}{X_i}\right)^{\alpha}}d\alpha d\beta}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\alpha^{n+b_v-1}\beta^{n\alpha+a_v-1}\left(\prod_{i=1}^{n}X_i^{-(\alpha+1)}\right)e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{B}{X_i}\right)^{\alpha}}d\alpha\, d\beta}$$

ولصعوبة اجراء التكامل اعلاه يتم استخدام تقريب لندلي المعرف من قبل (Lindely.1964) والذي يعرف بالصيغة الاتية

$$E(u|x_1,x_2,\ldots,x_n) = u(\alpha,\beta)+\frac{1}{2}\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{m}(u_{ij}+2u_i\rho_i)\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{m}\sum_{k}^{m}\sum_{l}^{m}L_{ijk}\,\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l$$

وعند m=2 تكون الصيغة اعلاه كالآتي

$$\begin{aligned}E(u|x_1,x_2,\ldots,x_n) &= u \\ &+\frac{1}{2}[(u_{11}\sigma_{11}+2u_1\rho_1\sigma_{11})+(u_{12}\sigma_{12}+2u_1\rho_2\sigma_{12})+(u_{21}\sigma_{21}+2u_2\rho_1\sigma_{21}) \\ &+(u_{22}\sigma_{22}+2u_2\rho_2\sigma_{22})] \\ &+\frac{1}{2}[(u_2\sigma_{12}+u_1\sigma_{11})(L_{122}\sigma_{22}+L_{211}\sigma_{21}+L_{121}\sigma_{12}+L_{111}\sigma_{11})+(u_2\sigma_{22} \\ &+u_1\sigma_{21})(L_{222}\sigma_{22}+L_{212}\sigma_{21}+L_{122}\sigma_{12} \\ &+L_{112}\sigma_{11})]\end{aligned} \quad \ldots(23)$$

في حالة تقدير α

نفرض ان

$$u=\alpha$$

$$u_1=1\ ;\ u_{11}=0;\ u_{12}=0\ ;\ u_2=0\ ;\ u_{22}=0$$

$$\rho = (a_v-1)\ln(\beta)+(b_v-1)\ln(\alpha)$$

ρ : اللوغاريتم الطبيعي للتوزيع الاولي المشترك

$$\rho_1 = \frac{(b_v - 1)}{\alpha} \qquad ; \rho_2 = \frac{(a_v - 1)}{\beta}$$

ρ_2, ρ_1: مشتقة اللوغاريتم الطبيعي للتوزيع الاولي المشترك نسبة الى α و β على التوالي

وبتعويض كل من $u, u_1, u_{11}, u_2, u_{22}, u_{12}, \rho_2, \rho_1$ في الصيغة (23) نحصل على المقدر بأسلوب بيز كالآتي

$$\hat{\alpha}_{Bays_1} = \left[\left(\frac{(b_v - 1)}{\hat{\alpha}_{Mle}}\sigma_{11}\right)\right] + Z_A \qquad \dots(24)$$

حيث ان

$$Z_A = \hat{\alpha}_{Mle} + \left(\frac{(a_v - 1)}{\hat{\beta}_{Mle}}\sigma_{12}\right) + \frac{1}{2}L_{122}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{3}{2}L_{121}\sigma_{11}\sigma_{12} + \frac{1}{2}L_{222}\sigma_{21}\sigma_{22} + L_{122}\sigma_{12}\sigma_{21} + \frac{1}{2}L_{111}{\sigma_{11}}^2 \qquad \dots(25)$$

L_{ijk} : مشتقة اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان لتوزيع فريجت

و σ_{ij} : يمثل العنصر (i,j)- في معكوس مصفوفة (L_{ij})

ولإيجاد المقدر بأسلوب E– بيز نفرض ان معلمة التوزيع الاولي b_v في الصيغة (24) تتبع توزيع كاما الموصوف بـــ

$$b_v \sim Gamma(s_v, t_v)$$
$$P(b_v) = \frac{{t_v}^{s_v}}{\Gamma(s_v)}{b_v}^{s_v - 1}\, e^{-t_v b_v} \qquad \dots(26)$$

وبأخذ التوقع لمقدر بيز في المعادلة (24) نسبة الى b_v في المعادلة (26)

ويكون المقدر بأسلوب E-بيز كما في الصيغة الاتية

$$\hat{\alpha}_{EBays_1} = \left[\left(\left[\frac{s_v}{t_v\hat{\alpha}_{Mle}} - \frac{1}{\hat{\alpha}_{Mle}}\right]\sigma_{11}\right) + z_A\right] \qquad \dots(27)$$

في حالة تقدير β

نفرض

$$u = \beta$$
$$u_2 = 1, u_{22} = 0, u_1, u_{11}, u_{12} = 0$$

وبتعويض قيم كل من $\rho_2, \rho_1, u_2, u_{22}, u_1, u_{11}, u_{12}$ في المعادلة (23) نحصل على مقدر بيز كما في الصيغة الاتية

$$\hat{\beta}_{Bays_1} = \frac{(a_v - 1)}{\hat{\beta}_{Mle}}\sigma_{22} + Z_B \qquad \dots(28)$$

حيث ان

$$Z_B = \hat{\beta}_{Mle} + \frac{(b_v - 1)}{\hat{\alpha}_{Mle}}\sigma_{21} + \left[\frac{3}{2}L_{122}\sigma_{12}\sigma_{22} + L_{121}{\sigma_{12}}^2 + \frac{1}{2}L_{111}\sigma_{11}\sigma_{12} + \frac{1}{2}L_{222}{\sigma_{22}}^2 + \frac{1}{2}L_{112}\sigma_{11}\sigma_{22}\right] \qquad \dots(29)$$

ونفرض ان معلمة التوزيع الاولي a_v تتبع توزيع كاما الموصوف بـ

$$a_v \sim Gamma(c_v, r_v)$$
$$P(a_v) = \frac{{r_v}^{c_v}}{\Gamma(c_v)}{a_v}^{c_v - 1}\, e^{r_v a_v} \qquad \dots(30)$$

وبأخذ التوقع لمقدر بيز في المعادلة (28) نسبة الى توزيع الاولي لـa_v في المعادلة (30) نحصل على المقدر بأسلوب E–بيز كما في الصيغة الاتية

$$\hat{\beta}_{EBays_1} = \left(\frac{c_v}{r_v \hat{\beta}_{Mle}} - \frac{1}{\hat{\beta}_{Mle}}\right)\sigma_{22} + Z_B \qquad \dots(31)$$

وعندما يكون التويع الاولي لكل من α و β توزيع كاما الموصوف بـ

$$\alpha \sim Gamma(g_k, h_k) \quad ; \quad \beta \sim Gamma(q_k, t_k)$$

يكون مقدر بيز لـ α كما في الصيغة الاتية

$$\hat{\alpha}_{Bays_2} = \left(\frac{g_k - 1}{\hat{\alpha}_{Mle}} - h_k\right)\sigma_{11} + Z_D \qquad \dots(32)$$

حيث ان

$$Z_D = \hat{\alpha}_{Mle} + \left(\left(\frac{q_k - 1}{\hat{\beta}_{Mle}} - t_k\right)\sigma_{12}\right) + \frac{1}{2}\left[(\sigma_{11})(L_{122}\sigma_{22} + L_{211}\sigma_{21} + L_{121}\sigma_{12} + L_{111}\sigma_{11}) + (\sigma_{21})(L_{222}\sigma_{22} + L_{212}\sigma_{21} + L_{122}\sigma_{12} + L_{112}\sigma_{11})\right] \quad \dots(33)$$

ومقدر E– بيز عندما يكون التوزيع الفوقي لمعلمتي التوزيع الاولي t_k, q_k التوزيع المنتظم الموصوف بـ

$$t_k \sim u(0, c) \quad ; q_k \sim u(0,1)$$

يكون بالصيغة الاتية

$$\hat{\alpha}_{EBays_2} = \frac{c(-\sigma_{11} c \hat{\alpha}_{Mle} - \sigma_{11} + 2\hat{\alpha}_{Mle} Z_D)}{2\hat{\alpha}_{Mle}} \qquad \dots(34)$$

علما ان Z_D سبق تعريفها في المعادلة (33)

وعند تقدير β

$$\hat{\beta}_{Bays_2} = \left[\left(\frac{q_k - 1}{\hat{\beta}_{Mle}} - t_k\right)(\sigma_{22})\right] + Z_{QQ} \qquad \dots(35)$$

$$Z_{QQ} = \hat{\beta}_{Mle} + \left(\left(\frac{g_k - 1}{\hat{\alpha}_{Mle}} - h_k\right)\sigma_{21}\right) + \frac{1}{2}\left[(\sigma_{12})(L_{122}\sigma_{22} + L_{211}\sigma_{21} + L_{121}\sigma_{12} + L_{111}\sigma_{11}) + (\sigma_{22})(L_{222}\sigma_{22} + L_{212}\sigma_{21} + L_{122}\sigma_{12} + L_{112}\sigma_{11})\right] \quad \dots(36)$$

وعندما يكون التوزيع الفوقي لمعلمتي التوزيع الاولي التوزيع المنتظم الموصوف بـ

$$g_k \sim u(0,1) \quad ; \quad h_k \sim u(0,c)$$

وبأخذ التوقع لمقدر بيز في المعادلة (35) نسبة التوزيع الفوقي لكل من g_k, h_k يكون المقدر بأسلوب E–بيز كما في الصيغة الاتية

$$\hat{\beta}_{EBays_2} = -\frac{\sigma_{22} c^2}{2} - \frac{c\sigma_{22}}{2\hat{\beta}_{Mle}} + cZ_{QQ} \qquad \dots(37)$$

3. الجانب التجريبي

يتم في هذا الجانب المقارنة بين اسلوب بيز واسلوب E– بيز لتقدير معلمة الشكل α والقياس β لتوزيع فريجت باستخدام لغة ماتلاب (Matlab2015) في الحالات الاتية

اولاً– تقدير α عندما β معلومة

1. نفرض احجام العينات (n=15,30,50,100,250,500)
2. نفرض قيم المعلمات (α=0.6,0.7,0.8,0.9) و (β=0.6,0.7,0.8,0.9) حيث ان $0<\beta\ ,\ \alpha<1$ لضمان ان التوزيع الاولي يكون دالة متناقصه وكما موضح في الجانب النظري.
3. توليد اعداد عشوائية u من التوزيع المنتظم القياسي $u(0,1)$ بتكرار (R=1000)
4. نضع $u = F(x)$.

وحلها نسبة الى u بإستخدام الدالة العكسية لتوزيع فريجت لكي نحصل على x وكالأتي .

$$x = F^{-1}(u)$$

$$x = \beta\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

5. اختيار قيم المعلمات الاولية والفوقية (γ=2,3) و($\delta = 0.4,0.8$) و (c=3,4) و(b=1.5,3) و (r=2,4) و(k=0.4,0.8) و تم اختيار قيم المعلمات لضمان ان التوزيعات الاولية تكون متناقصه حيث ان المعلمات تكون ضمن حدود معينة وكالاتي (b>1) و ($0< k,\delta < 1$) و (r>0) .
6. نقوم بإيجاد مقدر بيز $Bayes_1$ في المعادلة (5) ومقدر $E\text{-}Bayes_1$ في المعادلة (7) عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي گاما

و $Bayes_2$ في المعادلة (9) و $E\text{-}Bayes_2$ في المعادلة (11)عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم.

7. تتم المقارنة بين مقدر α باستخدام اسلوب Bayes واسلوب E-Bayes من خلال دالة المخاطرة التربيعية التي تمثل التباين للتوزيع اللاحق

$$R_{sq}^2 = V(\theta|x_1,x_2,\dots x_n)$$

والجدول (1) و (2) يبين قيم دالة المخاطرة التربيعية

جدول (1): قيم دالة المخاطرة لمعلمة الشكل α عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي گاما

	n=15 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 ;r=2				n=15 β=0.8 b=1.5 k=0.4 ;r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0179743	0.0322654	0.0454903	0.0726586	0.0173743	0.0316671	0.0498142	0.0693188
E-Bayes	0.0001089	0.0001955	0.0002757	0.0004404	0.0001053	0.0001919	0.0003019	0.0004201
	n=30 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 ;r=2				n=30 β=0.8 b=1.5 k=0.4 ;r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0063516	0.0114135	0.0177273	0.0278021	0.0064497	0.0115793	0.0197764	0.0268227
E-Bayes	0.0000202	0.0000362	0.0000563	0.0000883	0.0000205	0.0000368	0.0000628	0.0000852
	n=50 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 ;r=2				n=50 β=0.8 b=1.5 k=0.4 ;r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0029556	0.0058187	0.0111544	0.0156373	0.0031395	0.0057249	0.0105664	0.0160484
E-Bayes	0.0000057	0.0000113	0.0000217	0.0000304	0.0000061	0.0000111	0.0000205	0.0000312
	n=100 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 ;r=2				n=100 β=0.8 b=1.5 k=0.4 ;r=2			

	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0014047	0.0028097	0.0046374	0.0071539	0.0013667	0.0027544	0.0044819	0.0070604
E-Bayes	0.0000014	0.0000028	0.0000046	0.0000070	0.0000013	0.0000027	0.0000044	0.0000070
	n=250 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 ;r=2				n=250 β=0.8 b=1.5 k=0.4 ;r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0005041	0.0010252	0.0017692	0.0027312	0.0004998	0.0010136	0.0018011	0.0027729
E-Bayes	0.0000002	0.0000004	0.0000007	0.0000011	0.0000002	0.0000004	0.0000007	0.0000011
	n=500 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 ;r=2				n=500 β=0.8 b=1.5 k=0.4 ;r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0002380	0.0004841	0.0008750	0.0014245	0.0002415	0.0005074	0.0008855	0.0013430
E-Bayes	0.0000000	0.0000001	0.0000002	0.0000003	0.0000000	0.0000001	0.0000002	0.0000003

	n=15 β=0.5 ; b=1.5 ; k=0.4 r=4				n=15 β=0.8 b=1.5 k=0.8 ,r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.01690	0.03110	0.04840	0.08018	0.01464	0.02603	0.05355	0.07920
E-Bayes	0.00003	0.00005	0.00007	0.00012	0.00018	0.00032	0.00065	0.00096
	n=30 β=0.5 ; b=3 ; k=0.4; r=2				n=30 β=0.8 b=3 k= 0.4 ; r=2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.00871	0.01761	0.02567	0.03952	0.00714	0.01630	0.02767	0.04293
E-Bayes	0.00003	0.00006	0.00009	0.00014	0.00003	0.00006	0.00010	0.00015

جدول (2): قيم دالة المخاطرة لمعلمة الشكل α عندما يكون التوزيع الاولي گاما و الفوقي منتظم

	n=15 β=0.5 ; c=3 ; $\delta = 0.4$; $\gamma = 2$				n=15 β=0.8 c=3; $\delta = 0.4$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0122	0.0190	0.0358	0.0539	0.0120	0.0252	0.0383	0.0468
E-Bayes	0.0064	0.0100	0.0193	0.0295	0.0063	0.0135	0.0206	0.0253
	n=30 β=0.5 ; c=3; $\delta = 0.4$; γ =2				n=30 β=0.8 c=3; $\delta = 0.4$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0051	0.0103	0.0161	0.0250	0.0048	0.0088	0.0152	0.0259
E-Bayes	0.0026	0.0053	0.0083	0.0130	0.0025	0.0045	0.0078	0.0135
	n=50 β=0.5 ; c=3; $\delta = 0.4$; γ =2				n=50 β=0.8 c=3 ; $\delta = 0.4$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0033	0.0057	0.0090	0.0148	0.0030	0.0058	0.0096	0.0142
E-Bayes	0.0017	0.0029	0.0046	0.0075	0.0015	0.0029	0.0049	0.0073
	n=100 β=0.5 ; c=3; $\delta = 0.4$; γ =2				n=100 β=0.8 c=3 ; $\delta = 0.4$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0013	0.0026	0.0044	0.0066	0.0013	0.0025	0.0045	0.0075
E-Bayes	0.0007	0.0013	0.0022	0.0033	0.0007	0.0013	0.0023	0.0038
	n=250 β=0.5 ; c=3; $\delta = 0.4$; γ =2				n=250 β=0.8 c=3 ; $\delta = 0.4$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0005	0.0010	0.0017	0.0027	0.0005	0.0010	0.0017	0.0028
E-Bayes	0.0002	0.0005	0.0009	0.0013	0.0003	0.0005	0.0009	0.0014
	n=500 β=0.5 ; c=3; $\delta = 0.4$; γ =2				n=500 β=0.8 c=3 ; $\delta = 0.4$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0002	0.0005	0.0009	0.0014	0.0002	0.0005	0.0009	0.0013

E-Bayes	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0001	0.0003	0.0004	0.0007

	n=15 β=0.5 ; c=4 ; $\delta = 0.4$; γ =2				n=15 β=0.8 c=3; $\delta = 0.8$; γ =2			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0128	0.0249	0.0359	0.0489	0.0117	0.0212	0.0382	0.0583
E-Bayes	0.0064	0.0126	0.0182	0.0249	0.0059	0.0109	0.0201	0.0312
	n=30 β=0.5 ; c=3 ; $\delta = 0.8$ γ =2				n=30 β=0.8 c=3 ; $\delta = 0.4$; γ =3			
	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
Bayes	0.0149	0.0251	0.0350	0.0598	0.0068	0.0115	0.0185	0.0293
E-Bayes	0.0077	0.0130	0.0182	0.0326	0.0036	0.0062	0.0102	0.0165

الجدولين (1) و (2) يمثل قيم المقارنة بين اسلوب بيز واسلوب E- بيز حيث نلاحظ من الجدولين ان قيم دالة المخاطرة بأسلوب E-بيز كانت اقل من قيم المخاطرة بأسلوب بيز الاعتيادي وبزيادة حجم العينة تقل دالة المخاطرة كذلك عند زيادة قيمة β فأن المخاطرة تكون اقل ومن ملاحظة قيم دالة المخاطرة في الجدولين اعلاه نلاحظ ان قيمها عند استخدام توزيع دالة القوى كتوزيع اولي وتوزيع گاما كتوزيع فوقي في الجدول (1) تكون اقل منها في الجدول (2) عند استخدام توزيع گاما كتوزيع اولي والمنتظم كتوزيع فوقي.

ثانياً- تقدير β عندما α معلومة

1. اختيار قيم المعلمات الاولية و الفوقية $(\tau = 2,3)$ و $(c = 3,4)$ و
(a=1.5,3) و (s=2,3) و(t=0.4,0.8) و$(\omega = 0.4,0.8)$
2. نقوم بإيجاد مقدر بيز $Bayes_1$ في المعادلة (16) ومقدر $EBayes_1$ في المعادلة (17)عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى و الفوقي گاما.

و $Bayes_2$ في المعادلة (18) و مقدر $E\text{-}Bayes_2$ في المعادلة (20) عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم.

3. تتم المقارنة بين اسلوب Bayes واسلوب E-Bayes باستخدام دالة المخاطرة التربيعية

ويوضح الجدول (3) و (4) قيم دالة المخاطرة لمعلمة القياس β عند قيم مختلفة للمعلمات

جدول (3): قيم دالة المخاطرة لمعلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي گاما

	n=15 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4				n=15 α=0.8 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4			
	β=0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.12323	0.13934	0.15138	0.17379	0.05123	0.07246	0.08507	0.10201
E-Bayes	0.00137	0.00155	0.00168	0.00193	0.00038	0.00054	0.00063	0.00076
	n=30 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2 ; ;t=0.4				n=30 α=0.8 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.04972	0.05417	0.06103	0.07348	0.02270	0.02956	0.03202	0.04192
E-Bayes	0.00030	0.00033	0.00037	0.00045	0.00009	0.00012	0.00013	0.00016
	n=50 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4				n=50 α=0.8 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.02661	0.03149	0.03836	0.04152	0.01231	0.01518	0.01885	0.02393
E-Bayes	0.00010	0.00012	0.00014	0.00016	0.00003	0.00004	0.00005	0.00006
	n=100 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2; t=0.4				n=100 α=0.8 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4			
	β=0.6	β=0.7	β=0.8	β=0.9	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.012627	0.014996	0.016530	0.018531	0.005930	0.007335	0.009345	0.011057

E-Bayes	0.000025	0.000029	0.000032	0.000036	0.000007	0.000009	0.000011	0.000014
	n=250 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2; t=0.4				n=250 α=0.8 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.4			
	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.004943	0.005694	0.006529	0.007542	0.0022884	0.0028989	0.0035464	0.0043041
E-Bayes	0.000004	0.000005	0.000005	0.000006	0.0000011	0.0000014	0.0000018	0.0000021
	n=500 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2; t=0.4				n=500 α=0.8 ; a=1.5 ; s=2; t=0.4			
	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0024198	0.0028548	0.0032550	0.0036788	0.0011138	0.0014242	0.0017993	0.0021132
E-Bayes	0.0000010	0.0000011	0.0000013	0.0000015	0.0000003	0.0000004	0.0000004	0.0000005
	n=15 α=0.5 ; a=3 ; s=2 ;t=0.4				n=15 α=0.8 ; a=1.5 ; s=3 ;t=0.4			
	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9	β=0.6	β=0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.1450	0.1667	0.1876	0.2313	0.0507	0.0643	0.0798	0.0974
E-Bayes	0.0014	0.0016	0.0018	0.0022	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003
	n=30 α=0.5 ; a=1.5 ; s=2 ;t=0.8				n=30 α=0.8 ; a=3 ; s=2 ;t=0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0638	0.0757	0.0830	0.0947	0.0658	0.0838	0.0903	0.1032
E-Bayes	0.0009	0.0011	0.0012	0.0014	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007

جدول (4): قيم دالة المخاطرة لمعلمة القياس β عندما يكون التوزيع الاولي گاما و الفوقي منتظم

	n=15 ; α=0.5 ; τ =2 ; c=3; ω=0.4				n=15 ; α=0.8 ; τ =2 ;c=3; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0707	0.0760	0.0824	0.0855	0.0346	0.0456	0.0546	0.0630
E-Bayes	0.0406	0.0436	0.0476	0.0495	0.0186	0.0247	0.0298	0.0346
	n=30 α=0.5 ; τ =2 ; c=3; ω =0.4				n=30 α=0.8 ; τ =2 ;c=3 ; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0373	0.0437	0.0469	0.0531	0.0189	0.0234	0.0293	0.0332
E-Bayes	0.0199	0.0234	0.0252	0.0287	0.0098	0.0122	0.0153	0.0174
	n=50 α=0.5 ; τ =2 ; c=3; ω =0.4				n=50 α=0.8 ; τ =2 ;c=3; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0228	0.0253	0.0311	0.0332	0.0110	0.0138	0.0172	0.0205
E-Bayes	0.0118	0.0132	0.0162	0.0173	0.0056	0.0070	0.0088	0.0105
	n=100 α=0.5 ; τ =2 ; c=3; ω =0.4				n=100 α=0.8 ; τ =2 ;c=3 ; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0116	0.0137	0.0162	0.0171	0.0056	0.0071	0.0087	0.0106
E-Bayes	0.0059	0.0070	0.0083	0.0087	0.0028	0.0036	0.0044	0.0054
	n=250 α=0.5 ; τ =2 ; c=3 ; ω =0.4				n=250 α=0.8 ; τ =2 ;c=3 ; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0047	0.0055	0.0064	0.0070	0.0022	0.0028	0.0035	0.0042
E-Bayes	0.0024	0.0028	0.0032	0.0035	0.0011	0.0014	0.0018	0.0021
	n=500 α=0.5 ; τ =2 ; c=3 ; ω =0.4				n=500 α=0.8 ; τ =2 ; c=3 ; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0024	0.0028	0.0032	0.0035	0.0011	0.0014	0.0017	0.0021
E-Bayes	0.0012	0.0014	0.0016	0.0018	0.0006	0.0007	0.0009	0.0011
	n=15 α=0.5 ; τ =3 ; c=3 ; ω =0.4				n=15 α=0.8 ; τ =2 ; c=4 ; ω =0.4			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9

Bayes	0.0542	0.0578	0.0671	0.0729	0.0337	0.0432	0.0492	0.0600
E-Bayes	0.0372	0.0400	0.0477	0.0527	0.0171	0.0220	0.0251	0.0307
	n=30 α=0.5 ; τ =2 ; c=3 ; ω =0.8				n=30 α=0.8 ; τ =2 ; c=3 ; ω =0.8			
	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9	β =0.6	β =0.7	β =0.8	β =0.9
Bayes	0.0361	0.0415	0.0504	0.0543	0.0183	0.0235	0.0303	0.0332
E-Bayes	0.0187	0.0216	0.0264	0.0285	0.0093	0.0120	0.0156	0.0171

من الجدول (3) نلاحظ ان قيم دالة المخاطرة عند استخدام دالة القوى كتوزيع اولي وتوزيع گاما كتوزيع فوقي اقل من قيم دالة المخاطرة في الجدول (4) عند استخدام توزيع گاما كتوزيع اولي والتوزيع المنتظم كتوزيع فوقي وبزيادة حجم العينة تقل قيم دالة المخاطرة وايضا عند زيادة α فان المخاطرة تقل ومن الجدولين اعلاه نلاحظ ان قيم دالة المخاطرة باستخدام اسلوب E-بيز اقل من قيم المخاطرة بأسلوب بيز الاعتيادي.

ثالثاً– عندما α و β غير معلومة

1. اختيار قيم المعلمات الاولية و الفوقية $(a_v = 1.5,3,5)$ $(b_v = 1.5,3)$ و
$(t_v = 1.5,3)$ و $(c_v, s_v, q_k = 0.3)$ و $(r_v = 1.5)$ و $(h_k, g_k =1.5,3)$ و $(g_k, h_k =0.3,0.8)$ و
$(t_k = 1.5,3)$
2. نقوم بإيجاد مقدر بيز $Bays_1$ لـ α في المعادلة (24) و $EBays_1$ في المعادلة (27) وكذلك مقدر بيز $Bays_1$ لـ β في المعادلة (28) و $EBays_1$ في المعادلة (31) عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى و الفوقي گاما، ونقوم بإيجاد مقدر بيز $Bays_2$ لـ α في المعادلة (32) و $EBays_2$ في المعادلة (34) وكذلك مقدر بيز $Bays_2$ لـ β في المعادلة (35) و $EBays_2$ في المعادلة (37) عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم.
3. تتم المقارنة بين اسلوب Bayes واسلوب E-Bayes باستخدام دالة المخاطرة التربيعية

الجدول (5) دالة المخاطرة عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي كاما عند α و β غير معلومة

الجدول (6) دالة المخاطرة عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم عند α و β غير معلومة

β	n=15, $t_k = 1.5, q_k = 0.3$ $,h_k = 1.5, g_k = 0.3, c = 3$					n=30 ; $t_k = 1.5, q_k = 0.3$ $,h_k = 1.5, g_k = 0.3, c = 3$				n=50 ; $t_k = 1.5, q_k = 0.3$ $,h_k = 1.5, g_k = 0.3, c = 3$			
		α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9	0.6	0.7	0.8	0.9	α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
0.6	Bayes	0.0850	0.0706	0.0834	0.0966	0.0584	0.0654	0.0698	0.0625	0.0529	0.0639	0.0759	0.0858
	E-Bayes	0.0040	0.0080	0.00496	0.0056	0.00018	0.0018	0.0022	0.00022	0.0036	0.0004	0.0004	0.00004
		α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9					α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
0.7	Bayes	0.2275	0.3530	0.2969	0.2490	0. 2137	0. 2254	0. 2411	0.03203	0.01151	0.0127	0.0137	0.0141
	E-Bayes	0.0852	0.0062	0.0095	0.0063	0.00162	0.00242	0.00224	0.00274	0.0056	0.0004	0.0008	0.0007
		α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9					α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
0.8	Bayes	0.0797	0.0757	0.0813	0.0835	0.0623	0.0551	0.0611	0.0544	0.0352	0.0247	0.0122	0.0112
	E-Bayes	0.0054	0.0050	0.0056	0.0060	0.0042	0.0038	0.00358	0.00278	0.00241	0.00025	0.0011	0.0019
		α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9					α=0.6	α=0.7	α=0.8	α=0.9
0.9	Bayes	0.0811	0.0786	0.0748	0.0669	0.04091	0.04191	0.04479	0.04641	0.03224	0.0344	0.0256	0.0271
	E-Bayes	0.0042	0.0038	0.0039	0.0034	0.0035	0.0032	0.0035	0.00031	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

من الجدولين (5) و (6) نلاحظ ان دالة المخاطرة عند استخدام توزيع دالة القوى كتوزيع اولي وكاما كتوزيع فوقي تكون اقل من قيم المخاطرة عند استخدام توزيع كاما كتوزيع اولي والمنتظم كتوزيع فوقي وكذلك يتضح من الجدولين اعلاه ان المخاطرة بأسلوب E– بيز اقل من المخاطرة بأسلوب بيز الاعتيادي.

4. الجانب التطبيقي:

يعتبر السيراميك الترميمي من التقنيّات الجديدة فهي عملية ترميم للأسنان بحيث يُغطّى سطح السن ،اذ ان للسيراميك الترميمي خصائص مميزة من حيث الجمالية والتوافق مع الحياة ولكنها تكون عرضه للتكسر من تأثير بعض المواد وسريعة التأثر والتكسر بالعوامل الخارجية كالصدمات اذ يمكن ان يعد هذا التكسر او العرضة للكسر نوع من الفشل والذي يكون من الصعب التنبؤ به او قياس درجة موثوقيته.

ونظراً لارتفاع تكلفة ترميم الاسنان احياناً لا سيما في حالات متقدمة من امراض الاسنان وصعوبة الحصول على اوقات فشل تمثل فشل السيراميك الترميمي في اداء وظيفته لذلك تم الاستعانة بمركز كربلاء التخصصي لطب الاسنان حيث توفرت لديهم سجلات لتسجيل وقت بناء السيراميك الترميمي لأسنان المرضى المراجعين للمركز . اذ ان لكل مريض يراجع المركز لترميم سن او حشوة سيراميكية يفتح له ملف في المركز يبقى هذا الملف مفتوحاً حتى عند مراجعة المريض في المرات اللاحقة وبذلك يتم تسجيل الوقت من بداية الترميم وحتى مراجعة المريض في المرة الثانية في حال حصل كسر او فشل في الترميم فيسجل وقت العودة ، فتم الحصول على بيانات اخذت من (ماجد، شهد شوكت، 2019) تمثل الوقت لحين الفشل للسيراميك الترميمي لأسنان المراجعين للمركز مقاسة بالأشهر ولمدة (5) سنوات من سنة (2014–2019) ولعينة حجمها (50) وبين ان البيانات تتبع توزيع فريجت وذلك من خلال اختبار للبيانات الحقيقية باستخدام برنامج Easiy fit وقد تم توظيف الاختبارات الاتية

Kolmogorov, Anderson, Chi squared عند مستوى معنوية 0.05

الجدول (7) يبين اختبارات ملائمة البيانات الحقيقة

Test	Kolmogorov-smirnov	Anderson Darling	Chi-Squared
Sig	0.20686	1.475	7.7189

حيث اثبتت جميع هذه الاختبارات ان البيانات التطبيقية المختارة تتبع لتوزيع فريجت

وتمت المقارنة بين طرق تقدير باستخدام دالة المخاطرة التربيعية في الحالات الآتية:–

اولاً– تقدير معلمة الشكل α

يتم المقارنة بين طريقة التقدير بيز و E بيز للبيانات الحقيقية لمعلمة الشكل α من خلال دالة المخاطرة التربيعية التي تمثل التباين للتوزيع اللاحق

$$R_{sq}^2 = V(\alpha|x)$$

الجدول (8) يوضح قيم دالة المخاطرة التربيعية عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي كاما لمعلمة الشكل α

β=0.5	R_{sq}^2		β=0.8	R_{sq}^2	
	Bayes	**E-Bayes**		**Bayes**	**E-Bayes**
b=1.5 ;r=2;k=0.4	0.009300	0.000018	b=1.5 ;r=2;k=0.4	0.003769	0.000007
b=1.5;r=4;k=0.4	0.009300	0.000005	b=1.5; r=2; k=0.8	0.003769	0.000015
b=3;r=2 ;k=0.4	0.009571	0.000018	b=3; r=2; k=0.4	0.003879	0.000007

الجدول (9) يوضح قيم دالة المخاطرة التربيعية عندما يكون التوزيع الاولي كاما والفوقي منتظم لمعلمة الشكل α

β=0.5	R^2_{sq}		β=0.8	R^2_{sq}	
	Bayes	E-Bayes		Bayes	E-Bayes
=0.4 ;c=3; γ =2δ	0.0086	0.0044	=0.4 ;c=3; γ =2δ	0.00357	0.0018
=0.8 ;c=3; γ =2δ	0.0087	0.0043	=0.4 ;c=3; γ =3δ	0.00351	0.0018
=0.4 ;c=4; γ =2δ	0.0086	0.0043	=0.8 ;c=3; γ =2δ	0.00359	0.0018

من الجدول (8) و (9) نلاحظ ان زيادة قيمة معلمة التوزيع الاولي b تؤدي الى زيادة قيمة دالة المخاطرة التربيعية للمقدر بطريقة بيز وكلما كانت القيمة لمعلمة التوزيع الفوقي s اكبر تزداد دالة المخاطرة للمقدر بطريقة E-بيز في حال كان التوزيع الاولي دالة القوى و الفوقي گاما وكذلك في حال كان التوزيع الاولي كاما و الفوقي منتظم.

ثانياً- تقدير معلمة القياس β

للمقارنة بين طريقة التقدير بيز و E بيز للبيانات الحقيقية لمعلمة القياس β يتم ذلك باستخدام دالة المخاطرة التربيعية. والجدول (10) يبين قيم دالة المخاطرة التربيعية في حالة كان التوزيع الاولي دالة القوى و الفوقي گاما والجدول (11) يمثل قيم دالة المخاطرة عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم

الجدول (10) يوضح قيم دالة المخاطرة التربيعية عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي گاما لمعلمة القياس β

α=0.5	R^2_{sq}		α=0.8	R^2_{sq}	
	Bayes	E-Bayes		Bayes	E-Bayes
a=1.5 ;*s*=2;*t* =0.4	0.02701	0.00010	**a=1.5 ; *s* =2; *t*=0.4**	0.00875	0.00002
a=1.5; *s*=2; *t*=0.8	0.0270	0.0002	**a=1.5; *s*=3; *t*=0.4**	0.00875	0.000009
a=3; *s* =1.5; *t* =0.3	0.02854	0.00010	**a=1.5; *s* =2; *t* =0.8**	0.00875	0.00004

الجدول (11) يوضح قيم دالة المخاطرة التربيعية عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم لمعلمة القياس β

α=0.5	R^2_{sq}		α=0.8	R^2_{sq}	
	Bayes	E-Bayes		Bayes	E-Bayes
=0.4 ;c=3; τ =2ω	0.0229	0.0118	**=0.4 ;c=3; τ =2ω**	0.0080	0.0041
=0.4 ;c=4;τ=2ω	0.0229	0.0115	**=0.8 ;c=3 τ =2ω**	0.0081	0.0041
=0.4 ;c=3; τ =3ω	0.0215	0.0118	**=0.4 ;c=4;τ=2ω**	0.0080	0.0040

من الجدول (10) نلاحظ ان زيادة قيمة معلمة التوزيع الاولي (a) تؤدي الى زيادة قيمة دالة المخاطرة التربيعية للمقدر بطريقة بيز وكلما كانت القيمة لمعلمة التوزيع الفوقي s اكبر تزداد دالة المخاطرة للمقدر بطريقة E- بيز عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي توزيع گاما ونلاحظ من الجدول (11) ان زيادة (ω) تؤدي الى زيادة قيم دالة المخاطرة اما زيادة قيمة (τ, c) تؤدي الى تقليل دالة المخاطرة عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي توزيع منتظم.

ثالثاً- عندما α و β غير معلومة

الجدول (12) يوضح قيم دالة المخاطرة التربيعية عندما يكون التوزيع الاولي دالة القوى والفوقي گاما عند α وβ غير معلومة

	R^2_{sq}			R^2_{sq}	
	Bayes	E-Bayes		Bayes	E-Bayes
$a_v = 1.5$, $b_v = 1.5$, $c_v = 0.3$, $r_v = 1.5$, $t_v = 1.5$, $s_v = 0.3$	0.0011	0.00000777	$a_v = 1.5$, $b_v = 1.5$, $c_v = 0.8$, $r_v = 1.5$, $t_v = 1.5$, $s_v = 0.3$	0.0011	0.0000019

$a_y = 3;\ b_y = 1.5;\ c_y = 0.3, r_y = 1.5; t_y = 1.5; s_y = 0.3$	0.0012	0.00000776	$a_y = 5, b_y = 1.5, c_y = 0.3, r_y = 1.5, t_y = 1.5, s_y = 0.3$	0.0015	0.0000077
$a_y = 1.5;\ b_y = 3;\ c_y = 0.3, r_y = 1.5, t_y = 1.5; s_y = 0.3$	0.00003	0.00000776			

الجدول (13) يوضح قيم دالة المخاطرة التربيعية عندما يكون التوزيع الاولي گاما والفوقي منتظم عند α و β غير معلومة

	R^2_{sq}			R^2_{sq}	
	Bayes	E-Bayes		Bayes	E-Bayes
$t_k = 1.5;\ q_k = 0.3, h_k = 1.5; g_k = 0.3; c = 3$	0.0885	0.000062	$t_k = 1.5;\ q_k = 0.3; h_k = 1.5; g_k = 0.3; c = 3$	0.089	0.00001
$t_k = 3;\ q_k = 0.3; h_k = 1.5; g_k = 0.3; c = 3$	0.0966	0.000065			
$t_k = 1.5;\ q_k = 0.3; h_k = 3; g_k = 0.3; c = 3$	0.0027	0.000062			

من الجدولين (12) و (13) نلاحظ ان دالة المخاطرة عند استخدام توزيع دالة القوى كتوزيع اولي وگاما كتوزيع فوقي تكون اقل من قيم المخاطرة عند استخدام توزيع گاما كتوزيع اولي والمنتظم كتوزيع فوقي وكذلك يتبين من الجدولين اعلاه ان دالة المخاطرة بأسلوب E− بيز اقل من المخاطرة بأسلوب بيز الاعتيادي.

الاستنتاجات

1− من قيم دالة المخاطرة نلاحظ ان استخدام توزيع دالة القوى كتوزيع اولي وتوزيع گاما كتوزيع فوقي يكون افضل من استخدام توزيع گاما كتوزيع اولي والمنتظم كتوزيع فوقي لان قيم المخاطرة في الحالة الاولى اقل .

2− ان زيادة حجم العينة يؤدي الى تقليل قيم المخاطرة عند استخدام توزيعات اولية وفوقية مختلفة.

3 − من الجانب التطبيقي تبين ان قيم دالة المخاطرة بأسلوب E - بيز اقل من دالة المخاطرة بأسلوب بيز اي ان اسلوب E− بيز افضل من اسلوب بيز الاعتيادي.

التوصيات

1. نوصي باستخدام توزيعات اولية وفوقية جديدة حيث لاحظنا من خلال النتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي ان قيم دالة المخاطرة قد تختلف باختلاف التوزيع الاولي والفوقي .
2. استخدام اسلوب E- البيزي لتقدير معلمات التوزيعات الاخرى غير توزيع فريجت .
3. استخدام طرق تقدير اخرى كطريقة QE-Bayesian لتقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية.

المصادر

1.ماجد، شهد شوكت ،(2019)، "**مقارنة بعض طرائق تقدير معولية توزيع فريجت باستعمال معاينة المجموعات المرتبة مع تطبيق عملي**"، رسالة ماجستير ،قسم الاحصاء، كلية الادارة والاقتصاد ،جامعة كربلاء، كربلاء، العراق.

2.Gupta, I. (2017), **"Bayesian and E-Bayesian Method of Estimation of Parameter of Rayleigh Distribution-A Bayesian Approach under Linex Loss Function"**, International Journal of Statistics and Systems, 12(4), 791-796.

3. Han, M. (2006),**" E-Bayesian method to estimate failure rate"**, In the sixth international symposium on operations research and its applications (ISOR06) Xinjiang (pp. 299-311).

4. Harlow, D. G. (2002),**"Applications of the Frechet distribution function"**, International Journal of Materials and Product Technology, 17(5-6), 482-495.

5. Jaheen, Z. F., & Okasha, H. M. (2011),**" E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring"**, Applied Mathematical Modelling, 35(10), 4730-4737.

6. Liu, H. B., Yin, T., & Wang, C. (2014), **"E-Bayes estimation of Rayleigh distribution parameter"**, In Applied Mechanics and Materials (Vol. 596, pp. 305-308). Trans Tech Publications Ltd.

7. Okasha, H. M. (2014), **" E-Bayesian estimation for the Lomax distribution based on type-II censored data"**, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22(3), 489-495.

8. Reyad, H. M., Younis, A. M., & Ahmed, S. O. (2016), **"QE-Bayesian and E-Bayesian estimation of the Frechet model"**, Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, 1-29.

9. Reyad, H. M., & Ahmed, S. O. (2016), **" Bayesian and E-Bayesian estimation for the Kumaraswamy distribution based on type-ii censoring"**, International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 4(1), 10-17.

10. Yin, Q., & Liu, H. (2010, July), **" Bayesian estimation of geometric distribution parameter under the scaled squared error loss function"**, In 2010 The 2nd Conference on Environmental Science and Information Application Technology (Vol. 2, pp. 650-653). IEEE.