المجلد 12 العدد 28 | مجلة جامعة الانبار للعلوم الاقتصادية والادارية | السنة/2020 م

تقدير بيز التقريبي لمعلمات نموذج انحدار t المبتور الخطي البسيط

Approximate Bayesian estimation for parameters of simple linear truncated t regression model

أ.م. د. هيفاء عبدالجواد سعيد   م. الهام عبدالكريم حسين

hayfaajwad.65@uomosul.edu.iq

كلية علوم الحاسبات والرياضيات / جامعة الموصل   الكلية التقنية الزراعية – الموصل / الجامعة التقنية الشمالية

تاريخ استلام البحث 22/ 2017/12   تاريخ قبول النشر 15 / 2 /2018   تاريخ النشر 30/ 2020/6

المستخلص

يعامل الباحثين الكثير من الظواهر على انها تتبع توزيعات احتمالية غير مبتورة لكنها في الواقع تنتمي الى توزيعات مبتورة ، وتكون المقدرات للمعلمات باستخدام التوزيعات المبتورة اكثر كفاءة من التوزيعات غير المبتورة . تظهر هذه الظاهرة في نماذج الانحدار الخطية ، لهذا السبب اهتم هذا البحث بتقدير معلمات نموذج انحدار t المبتور الخطي البسيط عندما يكون متغير الاستجابة يتبع توزيع t المبتور من طرفين باسلوب بيز. وبسبب عدم امكانية معاملة الدالة التجميعية على انها كمية ثابتة فقد ظهرت صعوبة ايجاد التوزيعات الاحتمالية اللاحقة الهامشية لكل معلمة من معلمات النموذج ، لذلك فقد تم استخدام تقريب لندلي الذي يتعامل مع دالة كثافة الاحتمال اللاحقة المشتركة لمعلمات النموذج للحصول على التوقعات اللاحقة الهامشية .

الكلمات المفتاحية *تقدير :بيز ، نموذج انحدار t المبتور*

Abstract

Researchers treat many phenomena as having a non-truncated probability distribution, but in fact belong to truncated distributions . The estimators of the parameters by using the truncated distributions more efficiently than non-truncated distributions. This phenomenon appears in linear regression models. For this reason, this study is interested in estimating the parameters of simple linear regression truncated t model when the response variable follows t truncated distribution from two sides by using bayes method. Because a cumulative function can not be treated as a fixed quantity, it is difficult to find the posterior marginal probability distributions for each parameter of the model. Therefore, a lundley's approximation that deals with the joint posterior probability density function of the model parameters has been used to obtain expected Marginal posterior.

Keywords *: Bayesian estimation , truncated t regression model*

1- المقدمة :

تعتبـــر التوزيعات المبتورة مهمة جـدا ولها استخدامــات واسعة في الاحصـاء ، وقد ذكر Kim (2008) ان تاثير البتر على النماذج لوحظ منذ فترة بعيدة يعود الى ادبيات الاحصاء الكلاسيكي ، بينما ذكر Arismendi (2011) ان النتائج الاولى للتوزيعات المبتورة والتي تطورت فيما بعد قد اعتمدت بالاساس على متعدد المتغيرات للتوزيع الطبيعي القياسي ،وكان هناك نتيجتين رئيسيتين عُرِضتا في الاعوام 1953 و 1961 . وبذلك فقد تزايد استخدام التقدير لنماذج الانحدار المبتور والتي تكون هذه النماذج مرتبطة بالتوزيعات المبتورة سواء" كانت مبتورة من طرف واحدة او من

طرفين ، واعتمدت طرق التقدير على التقدير بالأسلوب الكلاسيكي واسلوب بيز (Thomas et al , 2000) ، فقد قـــدم (Greene , 2005) بحثا تم من خلاله بناء نموذج الانحدار الطبيعي واستخدم طريقة الامكان الاعظم في تقدير معلمات الانحدار الخطي المبتور وذلك بعد استخدام عدة تغييرات على معلمات التوزيع مثلا $\gamma = \frac{1}{\sigma}\beta , \theta = \frac{1}{\sigma}$ وذلك لتسهيل عملية التقدير ، وقدر (Halperin ,2011) الوسط μ للتوزيع الطبيعي المبتور مستخدما مقدر الامكان الاعظم ، بينما تناول (Cassidy , 2012) تاثير توزيع t عن طريق بتر توزيع مربع كاي من طرف اليسار وقدر من خلال ذلك التباين وكذلك العزوم لتوزيع t المبتور ، وقد تم تطبيق هذا البحث على اسعار المكالمات في اوروبا .

2 - نموذج انحدار t المبتور الخطي البسيط :

ان الانحدار المبتور يعني ان متغير الاستجابة معرفا عند فترة معينة و لا تتوفر اية معلومات عنه خارج تلك الفترة ، وكذلك بالنسبة الى المتغيرات التوضيحية (Greene , 2003).

ان نموذج الانحدار الخطي البسيط يكون بالشكل التالي :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \qquad \forall \ i = 1,2,\dots n \qquad (1)$$

اذ ان متغير الاستجابة y_i يتبع توزيع t المبتور من طرفين ضمن الفترة (a,b) وان $a<b$ ، بدرجة حرية v ، ومعلمة موقع هي $\beta_0 + \beta_1$ ومعلمة قياس مساوية لـ σ^2 . علما ان β_0 تمثل المقطع وان β_1 تمثل الميل و σ^2 تمثل معلمة التباين لنموذج الانحدار المعرف في المعادلة (1) اعلاه .

x_i : تمثل المشاهدة i للمتغير التوضيحي X .

u_i : يمثل حد الخطأ .

ان دالة كثافة احتمال y_i تُكتب بالشكل التالي :

$$f_\tau\left(\underset{(a,b)}{y_i} \middle| \beta_0,\beta_1,\sigma^2\right) = \frac{f(y_i|\beta_0,\beta_1,\sigma^2)}{F(b)-F(a)} = \frac{f(y_i|\beta_0,\beta_1,\sigma^2)}{\int_a^b f(y_i|\beta_0,\beta_1,\sigma^2)dy_i} \qquad (2)$$

$$a < y_i < b$$

$$-\infty < \beta_0,\beta_1 < \infty \ , \ \sigma^2 > 0$$

ان البسط في المعادلة (2) اعلاه يمثل دالة كثافة احتمال توزيع t بمعلمة موقع مساوية لـ $\beta_0 + \beta_1$ ومعلمة قياس مساوية لـ σ^2 ودرجة حرية v . اما المقام فيمثل الدالة التجميعية لنفس التوزيع الاحتمالي ضمن الفترة (a,b) .

وباستخدام التوزيعات المختلطة بين التوزيع الطبيعي ومعكوس كاما الذي يُرمز له بالرمز IG ،يمكن الحصول على التوزيع الاحتمالي الغير شرطي لـ y_i باتباع الاتي :

$$(y_i|\beta_0,\beta_1,\sigma^2,\tau) \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i , \sigma^2\tau)$$

$$\tau \sim IG\left(\frac{v}{2},\frac{v}{2}\right)$$

$$\Rightarrow (y_i|\beta_0,\beta_1,\sigma^2) = \int_0^{\infty} f(y_i|\beta_0,\beta_1,\sigma^2,\tau)f(\tau)d\tau$$

وبنفس الطريقة يتم تعريف الدالة التجميعية لـ y كالاتي :

$$F(b) - F(a) = \int_0^{\infty} \left(F(b|\tau) - F(a|\tau)\right) f(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^{\infty}\int_a^{b} f(y_i|\beta,\sigma^2,\tau)f(\tau)dy_i d\tau$$

وبالاستناد على الطريقة التي تنص على ان التوزيع الاحتمالي لمتغير طبيعي مبتور ضمن فترة البتر (a,b) مضافا اليه كمية ثابتة هو ايضا توزيع طبيعي مبتور بنفس نقاط البتر مضافا اليها تلك القيمة الثابتة لذلك فان التوزيع الاحتمالي للخطأ العشوائي u_i المشروط بـ τ يوصف بالشكل التالي :

$$u_i|\tau \sim N_{T_{\substack{a-\beta_0-\beta_1 x_i \\ b-\beta_0-\beta_1 x_i}}}(0,\sigma^2\tau)$$

3- تقدير معلمات نموذج انحدار t المبتور الخطي البسيط :

سوف يتم استخدام اسلوب بيز في تقدير معلمات النموذج وبتوفير معلومات غير خبرية عن معلمات النموذج وبتوفير n من مشاهدات العينة لمتغير الاستجابة والمتغير التوضيحي يصبح نموذج الانحدار الذي سبق تعريفه في المعادلة (1) بالشكل التالي :

$$\underline{y} = X\underline{\beta} + \underline{u}$$

حيث ان :

$\underline{u}$: متجه الاخطاء العشوائية ذو بعد (n x 1) .

$\underline{y}$: متجه مشاهدات متغير الاستجابة ذو بعد (n x 1).

X : مصفوفة مشاهدات المتغير التوضيحي ذات سعة (n x 2) و $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1)$ متجه معلمات النموذج .

وان دالة الامكان لمتغير الاستجابة y_i المشروط بـ τ هي :

$$f(y|\tau,\beta,\sigma^2) = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma\tau)^{n/2}} e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}}}{F(b^*|\tau) - F(a^*|\tau)}$$

$$F(b^*|\tau) - F(a^*|\tau) = \int_a^b \frac{1}{(2\pi\sigma\tau)^{n/2}} e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}} dy$$

وباستخدام المعلومات غير الخبرية فأن التوزيع الاولي المشترك المشروط بـ τ لـ $(\beta,\sigma^2|\tau)$ ، Griffiths) (2001 هو :

$$p(\beta,\sigma^2|\tau) = (\sigma^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$

وحسب نظرية بيز فان التوزيع المشترك اللاحق (Singh ,2008) للمعلمات $(\beta,\sigma^2|\tau)$ هو :

$$p(\beta,\sigma^2|\tau,y) = \frac{\dfrac{f(y|\tau,\beta,\sigma^2) * p(\beta,\sigma^2|\tau)}{F(b^*|\tau) - F(a^*|\tau)}}{\int_{\sigma^2}\int_{\beta} \dfrac{f(y|\tau,\beta,\sigma^2) * p(\beta,\sigma^2|\tau)}{F(b^*|\tau) - F(a^*|\tau)} d\beta d\sigma^2} \qquad (3)$$

نلاحظ في المعادلة (3) اعلاه صعوبة في ايجاد التوزيعات الهامشية اللاحقة لكل من متجه المعلمات β المشروط بـ τ و لـ σ^2 . ولهذا السبب سوف نستخدم تقريب لندلي في ايجاد مقدر بيز لـ β المشروط بـ τ و لـ σ^2 .

4- تقريب لندلي في ايجاد التوقعات اللاحقة

استخدم لندلي في عام 1980 طريقة تقريبية لايجاد العزوم اللاحقة . التوزيع اللاحق الاتي (انظر Sahoo(2014) و (Kizilaslan &Nadar(2015) :

$$E(u(\theta)|y) = \frac{\int_{\theta} u(\theta)L(\theta)p(\theta)d\theta}{\int_{\theta} L(\theta)p(\theta)d\theta} \qquad (4)$$

اذ ان :

$u(\theta)$: هي دالة في المعلمة θ ، ومن الممكن ان تكون θ متجه يحوي على k من المعلمات.

$L(\theta)$: هي دالة الامكان .

$p(\theta)$: هو التوزيع الاولي (السابق) للمعلمة .

قرَب لندلي المعادلة (4) الى الشكل التالي :

$$\begin{aligned}\hat{u}_B = u(\hat{\theta})|_{\theta=\hat{\theta}_{mle}} &+ \frac{1}{2}\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{m}(u_{ij} + 2u_i\rho_j)\, s_{ij}|_{\theta=\hat{\theta}_{mle}} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i}^{m}\sum_{j}^{m}\sum_{k}^{m}\sum_{r}^{m} L_{ijk}s_{ij}s_{kl}u_l|_{\theta=\hat{\theta}_{mle}} \\ &+ term\ of\ order\ n^{-2}\ or\ smaller \end{aligned} \qquad (5)$$

حيث ان :

$\hat{\theta}_{mle}$: يمثل مقدر الامكان الاعظم لـ θ .

ρ : اللوغاريتم الطبيعي للتوزيع الاولي المشترك لمعلمات اي نموذج مستخدم . ρ_j : مشتقة الـ ρ .

$u(\theta)$: دالة المعلمة θ ، u_i :المشتقة الاولى لـ $u(\theta)$ نسبة الى θ ، u_{ij}:المشتقة الثانية $u(\theta)$ نسبة الى θ

$L_{ijk} = \frac{\partial^3 lnL}{\partial \theta^3}$ وهي المشتقة الثالثة للوغارتيم الطبيعي لدالة الامكان نسبة الى المعلمات $\theta_i, \theta_j, \theta_k$.

$s_{ij} = [-L_{ij}]^{-1}$ العنصر(i,j) من معكوس سالب مصفوفة المشتقة الثانية لدالة الامكان .

سوف يتم تقدير ثلاث معلمات وهي ($\beta_0, \beta_1, \sigma^2$) لذلك سوف تكون حدود المجاميع في تقريب لندلي لغاية m=3 .

تحت دالة الخسارة التربيعية فان مقدر بيز الذي يجعل القيمة المتوقعة لدالة الخسارة التربيعية مساوٍ لتوقع التوزيع اللاحق الهامشي ، على هذا الاساس فعند تقدير β_0 المشروطة بـ τ سوف تكون $u(\beta_0|\tau) = \beta_0$ ، وعند تقدير β_1 المشروطة بـ τ سوف تكون $u(\beta_1|\tau) = \beta_1$ ، وعند تقدير σ^2المشروطة بـ τ سوف تكون $u(\sigma^2|\tau) = \sigma^2$.

اما ρ_j سوف تكون :

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \ln p(\beta, \sigma^2|\tau)}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\rho_2 = \frac{\partial \ln p(\beta, \sigma^2|\tau)}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \ln p(\beta, \sigma^2|\tau)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n+1}{2\sigma^2}$$

اما المتجه u_j فهو ذو سعة (3x1) وعناصره تمثل المشتقة الاولى نسبة للمعلمات $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ وهو: $u_i = (u_1 \quad u_2 \quad u_3)$ ، اذ ان الدليل (1) يشير الى المشتقة الاولى نسبة الى β_0 والدليل (2) يشير الى المشتقة الاولى نسبة الى β_1 والدليل (3) يشير الى المشتقة الاولى نسبة الى σ^2 .

و u_{ij} فهي تمثل المشتقة الثانية للمعلمة j من المشتقة الاولى للمعلمة i للمعلمات $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ وكمـــــا يلي:

$u_{ij} = u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, \dots$.

والمصفوفتين المتماثلتين $[L_{ijk}], [L_{ij}]$ تمثلان مصفوفة المشتقة الجزئية الثانية بسعة (3*3) ومصفوفة المشتقة الجزئية الثالثة بسعة (3*9) للوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان المشروطة بـ τ نسبة الى معلمات النموذج وسنرمز لهما بالرمزين $L^{(3)}, L^{(2)}$ وهما :

$$L^{(2)} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ \vdots & L_{22} & L_{23} \\ \cdots & \cdots & L_{33} \end{bmatrix} , \qquad L^{(3)} = \begin{bmatrix} L_{111} & L_{112} & L_{113} \\ & L_{122} & L_{123} \\ \vdots & \ddots & L_{133} \\ & \ddots & \vdots \\ L_{331} & L_{332} & L_{333} \end{bmatrix}$$

وحيث ان :

$$L(\beta,\sigma^2|\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}} e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}} \left(F(b^*|\tau)-F(a^*|\tau)\right)^{-n}$$

$$lnL(\beta,\sigma^2|\tau) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln\tau - \frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau} - \ln\left(F(b^*|\tau)-F(a^*|\tau)\right)$$

$$L_1 = \frac{\partial \ln l}{\partial\beta_0} = -\frac{1}{2\sigma^2\tau} * \frac{\partial Q}{\partial\beta_0} - \frac{\partial \ln(F(b^*|\tau)-F(a^*|\tau))}{\partial\beta_0}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2\tau} * \frac{\partial Q}{\partial\beta_0} - \frac{\frac{\partial}{\partial\beta_0}\left(\int_a^b \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}} e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}} dy\right)}{F(b^*|\tau)-F(a^*|\tau)}$$

علما" ان :

الدالة التراكمية لـ y_i هي $F(b|\tau)-F(a|\tau)$ وان الدالة التراكمية لـ n من المشاهدات هي $F(b^*|\tau)-F(a^*|\tau)$.

وان :

$$Q = (Y-X\beta)'(Y-X\beta)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\beta_0\sum_{i=1}^{n} y_i - 2\beta_1\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + n\beta_0^2 + \beta_1^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\beta_0\beta_1\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_0} = -2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta_0 - \beta_1\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = -2\,(n\bar{y} - n\beta_0 - n\beta_1\bar{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta_0}\left(\int_a^b \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}}\, e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}}\, dy\right)$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial\beta_0}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}}\, e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}}\right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}}\frac{(\sum_{i=1}^n y_i - n\beta_0 - \beta_1\sum_{i=1}^n x_i)}{\sigma^2\tau}\, e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}}\right) dy$$

$$L_1 = \frac{n\bar{y} - n(\beta_0 + \beta_1\bar{x})}{\sigma^2\tau} - \int_a^b \frac{-n(\beta_0+\beta_1\bar{x})}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}(-\sigma^2\tau)} * e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}}\, dy * \frac{1}{F(b^*|\tau) - F(a^*|\tau)} - \int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2\tau)^{n/2}(\sigma^2\tau)} * e^{-\frac{(Y-X\beta)'(Y-X\beta)}{2\sigma^2\tau}}\, dy * \frac{1}{F(b^*|\tau) - F(a^*|\tau)}$$

بفتح الاقواس واجراء الاختصارات المطلوبة نحصل على :

$$L_1 = \frac{n\bar{y} - 2n(\beta_0 + \beta_1\bar{x})}{\sigma^2\tau} + \frac{1}{\sigma^2\tau}\sum_{i=1}^{n} E(y_i|\tau)$$

حيث ان :

$$E(y_i|\tau) = \int_a^b \frac{y_i}{(2\pi)^{1/2}(\sigma^2\tau)^{1/2}(\sigma^2\tau)} * e^{-\frac{(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2}{2\sigma^2\tau}}\, dy_i * \frac{1}{F(b|\tau) - F(a|\tau)}$$

بنفس الطريقة نجد المشتقات المتبقية وكما يلي :

$$L_{11} = \frac{\partial L_1}{\partial\beta_0} = \frac{-2n}{\sigma^2\tau} + \frac{\sum\left[E(y_i^2|\tau) - (E(y_i|\tau))^2\right]}{\sigma^2\tau}$$

$$L_{12} = \frac{\partial L_1}{\partial \beta_1} = \frac{-2n\bar{x}}{\sigma^2\ \tau} + \frac{\sum x_i \left[E\left(y_i^2|\tau\right) - \left(E(y_i|\tau)\right)^2\right]}{(\sigma^2\ \tau)^2}$$

$$L_{13} = \frac{\partial L_1}{\partial \sigma^2} = \frac{-\left(n\bar{y} - 2n\left(\beta_0 - \beta_1\bar{x}\right)\right)}{\tau\ (\sigma^2)^2} + \frac{E(y_i|\tau)}{\tau\ (\sigma^2)^2}$$

$$L_2 = \frac{\partial \ln l}{\partial \beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sigma^2\ \tau} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2\ \tau}\ E(y_i\ |\tau\ )$$

$$L_{22} = \frac{\partial L_2}{\partial \beta_1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(\sigma^2\ \tau)^2}\left[E\left(y_i^2|\tau\right) - \left(E(y_i|\tau)\right)^2\right]$$

$$L_{23} = \frac{\partial L_2}{\partial \sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\tau\ (\sigma^2)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau\ (\sigma^2)^2}\ E(y_i\ |\tau\ )$$

$$L_3 = \frac{\partial lnL}{\partial \sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\ \beta_0 \sum_{i=1}^{n} y_i - 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{2\ \tau\ (\sigma^2)^2} - \frac{\left[\sum\left(E\left(y_i^2|\tau\right)\right) - 2\ \beta_0\ E(y_i|\tau) - 2\beta_1 x_i E(y_i|\tau)\right]}{2\ \tau\ (\sigma^2)^2}$$

$$L_{33} = \frac{\partial L_3}{\partial \sigma^2} = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\ \beta_0 \sum_{i=1}^{n} y_i - 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{\tau\ (\sigma^2)^3} + \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left((y_i^2 - d_{1i} y_i)|\tau\right)}{\tau\ (\sigma^2)^3} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[E\left(\left(y_i^2 + 2d_{1i} y_i^3 + d_{3i} y_i^2 - d_{1i} d_{2i} y_i\right)\middle|\tau\right) - E\left((y_i^2 - d_{1i} y_i)|\tau\right)E\left(((y_i^2 - d_{1i} y_i + d_{2i})|\tau\right)\right]}{(2\tau)^2 (\sigma^2)^2}$$

حيث ان :

$$d_{1i} = 2(\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

$$d_{2i} = \beta_0^2 + \beta_1^2 x_i^2 + 2\ \beta_0 \beta_1 x_i$$

$$d_{3i} = d_{1i}^2 + d_{2i}$$

$$L_{111} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta_0} = \frac{1}{(\tau\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n}\left[-E\left(\left(y_i^3 - (\beta_0 + \beta_1 x_i) y_i^2\right)|\tau\right) + \left(E(y_i^2|\tau)\right)^2 - (\beta_0 + \beta_1 x_i) E\left(y_i^2|\tau\right)\right]$$

$$L_{112} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(\tau\sigma^2)^2}\left[\left(E(y_i^2|\tau)\right)^2 - \left(E(y_i^3|\tau)\right)^2\right]$$

$$L_{113} = \frac{\partial L_{11}}{\partial \sigma^2} = \frac{2n}{\tau(\sigma^2)^2} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3E\left(\left(y_i^3 - d_{1i}y_i^2 + d_{2i}y_i\right)\middle|\tau\right)}{2\tau(\sigma^2)^3} - \frac{E(y_i^2|\tau)E\left((y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)^2)|\tau\right)}{2\tau(\sigma^2)^3} - \frac{E(y_i^2|\tau)}{(\sigma^2)^2} - \frac{E(y_i|\tau)E\left((y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)^2)|\tau\right)}{2\tau(\sigma^2)^3}\right]$$

$$L_{122} = \frac{\partial L_{12}}{\partial \beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(\tau\sigma^2)^3}\left[E(y_i^3|\tau) - E(y_i^2|\tau)\left(1 + 2E(y_i|\tau)\right) + 2\left(E(y_i|\tau)\right)^3\right]$$

$$L_{123} = \frac{\partial L_{12}}{\partial \sigma^2} = \frac{-2n\bar{x}}{\tau(\sigma^2)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2}\left[\frac{\left\{E\left(\left(y_i^4 - d_{1i}y_i^3 + d_{2i}y_i^2\right)\middle|\tau\right) - E(Q_1|\tau)E(y_i^2|\tau)\right\}}{(\sigma^2)^4} - \frac{E\left(\left(y_i^3 - d_{1i}y_i^2 + d_{2i}y_i\right)\middle|\tau\right) - E(Q_1|\tau)E(y_i|\tau)}{(\sigma^2)^4} - \frac{2}{(\sigma^2)^3}\left\{E(y_i^2|\tau) - \left(E(y_i|\tau)\right)^2\right\}\right]$$

$$L_{133} = \frac{\partial L_{13}}{\partial \sigma^2} = \frac{2d - 2E(y_i|\tau)}{\tau(\sigma^2)^2} + \frac{E\left(\left(y_i^3 - d_{1i}y_i^2 + d_{2i}y_i\right)\middle|\tau\right) - E(Q_1|\tau)E(y_i|\tau)}{2\tau^2(\sigma^2)^2}$$

$$L_{222} = \frac{\partial L_{22}}{\partial \beta_1} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{(\sigma^2\tau)^2}\left[E(y_i^3|\tau) - \left(E(y_i^2|\tau)\right)^2 - 2E(y_i|\tau)E(y_i^2|\tau) + 2\left(E(y_i|\tau)\right)^3\right]$$

$$L_{223} = \frac{\partial L_{22}}{\partial \sigma^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2}\left[\frac{E\left(\left(y_i^4 - d_{1i}y_i^3 + d_{2i}y_i^2\right)\middle|\tau\right) - E(y_i^2|\tau)\left(E(Q_1|\tau) + 2\sigma^2\right)}{2\tau(\sigma^2)^4} - \frac{E(y_i|\tau)\left[E\left(\left(y_i^3 - d_{1i}y_i^2 + d_{2i}y_i\right)\middle|\tau\right) - E(Q_1|\tau)E(y_i|\tau)\right]}{4\tau(\sigma^2)^4}\right]$$

$$L_{233} = \frac{\partial L_{23}}{\partial \sigma^2} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\tau(\sigma^2)^3} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau}\left[\frac{E\left(\left(y_i^3 - d_{1i}y_i^2 + d_{2i}y_i\right)\middle|\tau\right) - E(Q_1|\tau)E(y_i|\tau)}{2\tau(\sigma^2)^4} - \frac{2E(y_i|\tau)}{(\sigma^2)^3}\right]$$

$$L_{333} = \frac{\partial L_{33}}{\partial \sigma^2} = \frac{3d}{\tau(\sigma^2)^4} + \frac{\sum_{i=1}^{n}}{\tau(\sigma^2)^3}\left[\frac{E(w_{1i}Q_1|\tau) - E(w_{1i}|\tau)E(Q_1\,|\tau)}{2\tau(\sigma^2)^2} + \frac{3E(w_{1i}|\tau)}{\sigma^2}\right] - \frac{\sum_{i=1}^{n}}{(2\tau)^2}\left[\frac{E(rQ_1|\tau) - E(r|\tau)E(Q_1\,|\tau)}{(\sigma^2)^4} - \frac{4E(r|\tau)}{(\sigma^2)^5} - \frac{4E(r|\tau)E(Q_1\,|\tau)}{(\sigma^2)^5}\right] - \frac{\sum_{i=1}^{n}}{2\tau(\sigma^2)^6}\left[E(w_{1i}|\tau)E(Q_1^2\,|\tau) - 2\big(E(Q_1\,|\tau)\big)^2 + E(Q_1\,|\tau)E(w_{1i}Q_1|\tau)\right]$$

حيث ان :

$$w_{1i} = y_i^2 - 2d_{1i}y_i\,;$$

$$r = (y_i^4 - 2d_{1i}y_i^{\,3} + d_{3i}y_i^2 - d_{1i}d_{2i}y_i)$$

$$rQ_1 = y_i^6 + 3d_{1i}y_i^5 + d_{4i}y_i^4 + d_{5i}y_i^3 + d_{6i}y_i^2 + d_{7i}y_i$$

$$d_{3i} = d_{1i}^2 + d_{2i}\,;\; d_{4i} = 2\beta_0\beta_1x_i + d_{3i} - 2d_{1i}^2 + \beta_0^2 + \beta_1^2x_i^2$$

$$d_{5i} = 2d_{1i}\left(\beta_0^2 + \beta_1^2x_i^2\right) + 4d_{1i}\beta_0\beta_1x_i - d_{1i}d_{3i} - d_{1i}d_{2i}$$

$$d_{6i} = d_{3i}\left(\beta_0^2 + \beta_1^2x_i^2\right) + 2d_{3i}\beta_0\beta_1x_i + d_{1i}^2d_{2i}$$

$$d_{7i} = d_{1i}d_{2i}\left(\beta_0^2 + \beta_1^2x_i^2\right) + 2d_{1i}d_{2i}\beta_0\beta_1x_i$$

عندها ستكون صيغة لندلي لثلاث معلمات كما يلي :

$$\hat{u}_B = u + (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3 + a_4 + a_5) + \frac{1}{2}\left[A\,(u_1s_{11} + u_2s_{12} + u_3s_{13}) + B(u_1s_{21} + u_2s_{22} + u_3s_{23}) + C(u_1s_{31} + u_2s_{32} + u_3s_{33})\right]$$

حيث ان :

$$a_1 = \rho_1s_{11} + \rho_2s_{12} + \rho_3s_{13} = -\frac{n+1}{2\sigma^2}s_{13}$$

$$a_2 = \rho_1s_{21} + \rho_2s_{22} + \rho_3s_{23} = -\frac{n+1}{2\sigma^2}s_{23}$$

$$a_3 = \rho_1s_{31} + \rho_2s_{32} + \rho_3s_{33} = -\frac{n+1}{2\sigma^2}s_{33}$$

$$a_4 = u_{12}s_{12} + u_{13}s_{13} + u_{23}s_{23} = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{2}[u_{11}s_{11} + u_{22}s_{22} + u_{33}s_{33}] = 0$$

$$A = s_{11}L_{111} + 2s_{12}L_{121} + 2s_{13}L_{131} + 2s_{23}L_{231} + s_{22}L_{221} + s_{33}L_{331}$$

$$B = s_{11}L_{112} + 2s_{12}L_{122} + 2s_{13}L_{132} + 2s_{23}L_{232} + s_{22}L_{222} + s_{33}L_{332}$$

$$C = s_{11}L_{113} + 2s_{12}L_{123} + 2s_{13}L_{133} + 2s_{23}L_{233} + s_{22}L_{223} + s_{33}L_{333}$$

ولتقدير المعلمات فان :

1- مقدر بيز للمعلمة β_0 :

في هذه الحالة يتم ايجاد التوقع اللاحق لـ β_0 المشروط بـ **T** اي ان :

$$u(\beta_0|\tau) = \beta_0$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_0} = 1 \; ; u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_1} = 0 \; ; u_3 = \frac{\partial u}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_0^2} = 0$$

$$u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{22} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \rho}{\partial \beta_1} = 0 \rightarrow \rho_1 = \rho_2$$

$$\rho_3 = \frac{\partial \rho}{\partial \sigma^2} = -\frac{n+1}{2\,\sigma^2}$$

$$\hat{u}_{B|\tau} = \left[\beta_0 - \frac{n+1}{2\sigma^2}s_{13} + \frac{1}{2}[As_{11} + Bs_{21} + Cs_{31}]\right]|_{\beta_0=\hat{\beta}_0}$$

اما مقدر بيز غير الشرطي لـ β_0 فهو :

$$\hat{\beta}_{0B} = EE\left(\hat{\beta}_{0\beta}\,|data,\tau\right) = E\int_0^\infty \left(\hat{\beta}_{0B}|\tau\right)f(\tau)d\tau$$

2- مقدر بيز للمعلمة β_1 :

يتم ايجاد التوقع اللاحق لـ β_1 المشروط بـ τ وذلك باعتبار :

$$u(\beta_1|\tau) = \beta_1$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_0} = 0\ ;\ u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_1} = 1\ ;\ u_3 = \frac{\partial u}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_1^2} = 0$$

$$u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

$$E\left(\hat{\beta}_{1B}\,|data,\tau\right) = \hat{u}_{B|\tau} = \beta_1 - \frac{n+1}{2\sigma^2}s_{23} + \frac{1}{2}[As_{12} + Bs_{22} + Cs_{32}]$$

$$\hat{\beta}_{1B} = EE\left(\hat{\beta}_{1B}\,|data,\tau\right) = E\int_0^\infty \left(\hat{\beta}_{1B}|\tau\right)f(\tau)d\tau$$

3- مقدر بيز للمعلمة σ^2 :

لايجاد التوقع اللاحق لـ σ^2 المشروط بـ τ نفرض ان :

$$u(\sigma^2|\tau) = \sigma^2$$

$$u_1 = \frac{\partial u}{\partial \beta_0} = 0\ ;\ u_2 = \frac{\partial u}{\partial \beta_1} = 0\ ;\ u_3 = \frac{\partial u}{\partial \sigma^2} = 1$$

$$u_{33} = \frac{\partial^2 u}{\partial (\sigma^2)^2} = 0$$

$$u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{21} = u_{22} = u_{23} = u_{31} = u_{32} = u_{33} = 0$$

$$E\left(\sigma_B^2\,|data,\tau\right) = \hat{u}_{B|\tau} = \sigma^2 - \frac{n+1}{2\sigma^2}s_{33} + \frac{1}{2}[As_{13} + Bs_{23} + Cs_{33}]$$

$$\sigma_B^2 = EE\ (\ \sigma_B^2\ |data, \tau\ ) = E \int_0^{\infty} (\hat{\sigma}_B^2 | \tau) f(\tau) d\tau$$

الاستنتاجات :

1- لقد توصلنا في هذا البحث الى الاستنتاج التالي : تعتمد مقدرات بيز لمعلمة المقطع β_0 ومعلمة الميل β_1 و σ^2 على العزوم حول الصفر من الرتبة الثالثة والرابعة والسادسة .

2- يواجه تقريب لندلي صعوبة وجود الدالة التجميعية في التوزيع اللاحق ، اذ ان هذه الدالة لا يمكن معاملتها كثابت لأنها تعتمد على معلمات التوزيع الاحتمالي ، وهذه المعلمات هي متغيرات عشوائية بأسلوب بيز ومن الصعب جدا ايجاد مقدرات بيز الهامشية ، بينما بالتقريب المستخدم تمكنا من ايجاد المقدرات الهامشية من دون الحاجة الى ايجاد التوزيعات اللاحقة الهامشية .

المصادر :

1. مخول،مطانيوس ، غانم،عدنان (2011) : " فعالية استخدام توزيع ويبل الاحتمالي في التنبؤ " ، مجلة جامعة دمشق للعلوم الاقتصادية والقانونية ، المجلد 27 ، العدد الرابع ، ص(138-119)
2. Al-kanani, Iden Hassan ; Samier, Fadhaa, O. (2010) : " Estimate the parameters of Burr Type X distribution of the data of the patients with epidemiological disease" , Journal of college of education , No 6, 2010 , University of Baghdad , Iraq .
3. Arismendi,Juan Carlos (2011) : " Multivariate truncated moments" , ICMA Center , University of Reading .
4. Cassidy,Daniel T (2012) : " effective truncation of a student's t-distribution by truncation of the Chi-distribution in a Chi-normal mixture " , scientific research , open journal of statistical , 2 519-525 .
5. Greene, William H. (2003). Econometric Analysis (5th ed.). Prentice Hall. ISBN 0-13-066189-9.
6. Greene,William H. (2005) :" Censored data and truncated distribution " , Handbook of Econometrics:Vol.1 Theoretical Econometrics , Ch 20. , ed. T. Mills and K.Patterson Palgrave , London, forthcoming , 2005 .
7. Griffiths,William (2001) :"A Gibbs' sampler for the parameters of a truncated multivariate normal distribution" , Dep. Of economic , university of Melbourne.
8. Halperin,Max (2011) : " Estimation in the truncated normal distribution " , Journal of American Statistical Association , Vol.47 , No.259 , pp.457– 465 . www.Jstor.org / stable / 2281315 .
9. Kim,Hea-Jung (2008) : " Moments of truncated student-t distribution " , Journal of the Korean statistical society 37 81 – 87.
10. Kizilaslan,Fatih ,Nadar.Mustafa (2015) : " Classical and Bayesian estimation of reliability in multicomponent stress- strenghth model based on weibull distribution " , Revista colombiana de estadfstica , July 2015, volume 38 , Issue2 , pp. 467 to 484 , http:// dx.doi.org/10.15446/rce.v28n2.51674.
11. Sahoo,Ms.Subhasmite (2014) :" A Study on Bayesian Estimation of Parameters of Some Well Known Distribution Functions " , Thesis , National Institute of Technology , India .
12. Singh,Rahul. ,Kumar,Sanjay,Umesh singh,and Prakash,Gyan(2008) : " Bayes estimator of generalized-exponential parameters under linex loss function using lindley's approximation " ,Data science journal , V 7 , May 2008 .
13. Thomas.Marsh, L., and Mittelhamer,R.C. (2000) : " Truncated regression in empirical estimation " , paper presented at the Western Agricultural Economocs Association Annual Meetings , Vancouver ,British Columbia , June 29 –July 1 , 2000 .