اقتراح طريقة $Cum.f^{7/8}$ التقريبية لإيجاد الحدود الطبقية التقريبية المثلى في حالة التوزيع النسبي

عبد الستار علي حسين الدليمي / كلية التربية للبنات-جامعة الانبار

الملخص

يتضمن البحث طرق تقريبية تعطي حلول مقربة وهذه الحلول المقربة تعطي صيغ تقريبية لتباين متوسط المعاينة الطبقية $V(\bar{y}_{st})$.وكانت أولى هذه الطرق المقترحة لإيجاد الحدود الطبقية المثلى هي طريقة $Cum.f^{1/2}$ ،وهذه الطريقة اقترحت من قبل العالم Dalenius ودرست واعتمدت بعد ذلك من قبل كثير من العلماء أبرزهم العالم Serfing 1968 .حيث اقترح $K(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{1/2}(y)dy$ ووجد إن التباين الأمثل لهذه الطريقة هو $V(\bar{y}_{st})=\frac{K^2(y)}{12nL^2}$.

ثم عاد العالم Thomsen 1976 ليفترض طريقة أخرى وهي $Cum.f^{1/3}$ حيث افترض $H(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{1/3}(y)dy$ ليجد منه التباين الأمثل وهو $V(\bar{y}_{st})=\frac{H^3(y)}{12nL^2}$.وبعد ذالك عاد القصاب 1993 ليفرض طريقة أخرى وهي $Cum.f^{2/3}$.

وفي عام 1995 افترض الداغستاني طريقة جديدة وهي $Cum.f^{5/6}$.

وفي هذه الدراسة الموجودة ألان والمعتمدة من قبل الباحث ،حيث حاول إيجاد طريقة تقريبية جديدة $Cum.f^{7/8}$ لإيجاد الحدود الطبقية المثلى حيث افترض $D(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{7/8}(y)dy$ ووجد التباين الأمثل هو $V(\bar{y}_{st})=\frac{D^{8/7}(y)}{12nL^2}$.وكانت جميع الطرق في حالة التوزيع النسبي.

ومن اجل إبراز خصائص الطريقة المقترحة فقد أجرينا مقارنة بين الطريقة المقترحة والطرق الواردة في أعلاه اعتمادا على بعض التوزيعات النظرية (التوزيع المنضم –التوزيع الطبيعي – التوزيع الآسي) من خلال حساب التباين.

حيث اظهرت طريقة $Cum.f^{7/8}$ المقترحة بعض التباينات في النتائج ،حيث وجدنا إن هذه الطريقة أكثر كفاءة على الإطلاق من الطرق الأخرى في حالة التوزيع المنتظم من خلال الجدول(1-3),وتكون أكفء في حالة التوزيع الطبيعي كلما كانت قيمة σ كبيرة نسبيان خلال الجدول(2-3), بينما تكون أكفء في حالة التوزيع الآسي كلما كانت قيمة λ صغيرة نسبيا ونلاحظ ذلك من خلال الجدول (3-3).

Abstract

The paper included approximate methods that give approximate solution. There solutions give approximate formulas for the mean variance of stratified sampling $V(\bar{y}_{st})$.

The first method for finding optimal stratum boundaries is $\text{Cum.f}^{1/2}$ .proposed by dalenus, then it was studied and adopted by many scholars such as serfling 1968.He proposed $K(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{1/2}(y)dy$ and found that. He optimal variance for this method is $V(\bar{y}_{st})=\frac{K^2(y)}{12nL^2}$.

In 1976 Thomsen proposed another method namely $\text{Cum.f}^{1/3}$ where He supposed $H(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{1/3}(y)dy$ to find the optimal variance.

In 1993 AL-Kasab proposed another method namely; $\text{Cum.f}^{2/3}$.

In 1995 AL_Daghistani proposed a new method namely; $\text{Cum.f}^{5/6}$.

In this research we suggest a new approximation named the; $\text{Cum.f}^{7/8}$ method of proportional allocation .we assumed $D(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{7/8}(y)dy$,and found that the optimal variance for this method is $V(\bar{y}_{st})=\frac{D^{8/7}(y)}{12nL^2}$.

A comparison of this method with the above mentioned is given depending on three theoretical distributions: Uniform, Normal, and exponential distributions. This comparison is made by calculating the variance.

$\text{Cum.f}^{7/8}$ Method showed some variances in results. It has been found that this method is the most efficient from other method in uniform distribution case. Table (3-1). The larger the value of (σ),the more efficient the method would be in the normal distribution .the smaller the value of (λ),the more efficient the method world be in the exponential distribution as can be seen from tables (3-2), (3-3).

المبحث الأول

المعاينة العشوائية الطبقية (stratified Random Sampling)

(1-1)بعض التقديرات للطبقات التي قسم المجتمع إليها والى العينات التي سحبت من تلك الطبقات ومنها:-

(1-1-1)الوسط الحسابي للطبقة h ويرمز له بالرمز μ_h وهو

$$\mu_h = \frac{1}{N_h}\sum_{i=1}^{N_h} y_{hi} \quad ------(1\text{-}1)$$

حيث N_h هو عدد الوحدات الإحصائية في الطبقة h

وان y_{hi} هو المشاهدة i في الطبقة h . وان $(i = 1,2,3,\dots,N_h)$

(1-1-2) التبـــــاين للطبقــــة h والــــذي يرمـــــز لــــه بـــــالرمز σ_h^2

وهو $$\sigma_h^2 = \frac{1}{N_h - 1}\sum_{i=1}^{N_h}(y_{hi} - \mu_h)^2 \quad ----(1\text{-}2)$$

(1-1-3)الوسط الحسابي للعينة الماخوذه من الطبقةh ويرمز له بالرمز $\overline{y}_h$وهو

$$\overline{y}_h = \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi} \quad ----------------------(1\text{-}3)$$

حيث n_h هوعدد الوحدات الإحصائية الموجودة في الطبقة h .

وان y_{hi} هو المشاهدة i المأخوذة من الطبقة h. وان (i=1, 2, 3. . .,n_h)

(1-1-4)التباين للعينة الماخوذه من الطبقة h والذي يرمز له بالرمز S_h^2 وهو

$$S_h^2 = \frac{1}{n_h}\sum_{i=1}^{n_h}(y_{hi} - \overline{y}_h)^2 \quad ----------------------(1\text{-}4)$$

وزن الطبقة يعطى بالشكل التالي

$$W_h = \frac{N_h}{N} \quad ------------------------(1\text{-}5)$$

وعند ضرب الوسط الحسابي للطبقة h بوزن الطبقة h أي نضرب المعادلتين $(1-5),(1-1)$ لنحـــصل علـــى الوســط الحــسابي للمجتمـــع والـــذي ســنرمز لـــه بـــالرمز μ حيــث

$$\mu = \sum_{h=1}^{L} W_h\,\mu_h \quad -----(1\text{-}6)$$

وعند ضرب الوسط الحسابي للعينة المسحوبة من الطبقة h أي المعادلة (1-3) بوزن العينة الطبقية W_h نحصل على الوسط الحسابي الطبقي $\bar{y}_{st}$ حيث

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} w_h y_h \quad ------------(1-7)$$

(1-2)التوزيع النسبي proportional allocation

في حالة كون حجم الطبقة n_h علوم ولا توجد معلومات إضافية أخرى في التوزيع لعينه ذات حجم معطى n يمكن وضعه بشكل متناسب مع n_h على شرط توفر دليل بعدم اختلاف تباين العينات في الطبقات لهذا التوزيع

$$n_h = nW_n \quad ----------------(1-8)$$

ويعرف هذا التوزيع بالتوزيع النسبي وقد اقترح من قبل Bowley . [Cochran.W.G. (1977)] إن تباين متوسط المعاينة الطبقية في حالة التوزيع الآسي يعطى بالصيغة التالية

$$V(\bar{y}_{st})_{prop} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{L} W_h \sigma_h^2 \quad ----------------(1-9)$$

المبحث الثاني

استخدام الطرق التقريبية

(2-1)المقدمة

في هذا المبحث سيتم استعراض الطرق التقريبية السابقة مع شرح وافي للطريقة المقترحة ($cum.f^{7/8}$).ليكن حجم المجتمع قيد الدراسة هي N.أريد تقسيمه إلى L من الطبقات بحيث إن حجم المجتمع داخل الطبق h هو N_h وان (h=1,2,…,L)وان قيمة المشاهدة داخل الطبقة هي Y_{hi}. ولتكن Y_{hi} هي قيم لمتغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع بدالة كثافة احتمالية f(y) بحيث إن

$$\int_a^b f(y)dy = 1 \quad -----(2-1)$$

(2-2).

استخدام الطرق التقريبية using The Approximate Methods

(2-2-1)طريقة $cum.f^{1/2}$.

درست هذه الطريقة في العديد من الكتب والبحوث حيث اعتمد (serfing 1968)على التوزيع النسبي لإعطاء تباين الوسط الحسابي الطبقي.

$$\overset{*}{\underset{(prop)}{V}}(\bar{y}_{st}) = \frac{K^2(y)}{12nL^2} \quad ------------------(2-2)[Serfling.R.S.(1968).PP.1299]$$

حيث

$$K(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{1/2}(y)dy \quad ------------------(2-3)$$

(2-2-2) طريقة $cum.f^{1/3}$

درست هذه ألطريقه من قبل العالم (Thomsen 1976)[Thmsen.lb. (1976).PP.16] حيث اعتمد التوزيع النسبي لهذه الحالة حيث وجد إن التباين للوسط الحسابي الطبقي اعتمادا على هـذا التوزيع يعطى بالصيغة التالية.

$$\overset{**}{\underset{prop}{V}}(\bar{y}_{st}) = \frac{H^3(Y)}{12nL^2} \quad ------------------(2-4)$$

حيث إن

$$H(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{1/3}(y)dy \quad ------------------(2-5)$$

(2-2-3) طريقة $cum.f^{2/3}$

درست هذه الطريقة من قبل القـصاب 1993 [AL-Kassab.mmt. (1993).PP.46] حيـث اعتمد التوزيع النسبي لهذه الحالة حيث وجد إن التباين للوسط الحسابي الطبقي اعتمادا على هـذا التوزيع تعطى بالصيغة التالية.

$$\overset{***}{\underset{prop}{V}}(\bar{y}_{st}) = \frac{M^{3/2}}{12nL^2} \quad ------------------(2-6)$$

حيث إن

$$M(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{2/3}(y)dy \quad ------------------(2-7)$$

(2-2-4) طريقة $cum.f^{5/6}$

درست هذه ألطريقه من قبل الداغستاني 1995 [AL-Daghistani.(1995).PP.33] حيث وجد التبـاين للوسـط الحـسابي الطبقـي بالاعتمـاد علـى التوزيـع النـسبي هـو

$$\overset{****}{\underset{prop}{V}}(\bar{y}_{st}) = \frac{C^{6/5}(Y)}{12nL^2} ----------(2-8)$$

حيث إن

$$C(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{5/6}(y)dy \quad ----------------(2-9)$$

(2-2-5) طريقة $cum.f^{7/8}$ المقترحة

نفرض أن

$$D(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{7/8}(y)dy \quad ---------------(2-10)$$

ونركز على الفترة $[a,b]$ لان $f(y)$ تساوي الصفر عندما تكون خارج الفترة $[a,b]$ مع نسبة خطاء يمكن إهماله بحيث تكون حدود الطبقات هي $Y_1(y) < Y_2(y) < \ldots < Y_{L-1}(y)$ والتي تقسم الفترة $[a,b]$ إلى L من الطبقات حيث إن

$$Y_L(y)=b \quad , \quad Y_0(y)=a$$

سنرمز ل

$$D_h(y)=\int_{y_{h-1}}^{y_h} f^{7/8}(y)dy \quad ----------------(2-11)$$

حيث إن

$$\sigma_h^2=\frac{1}{W_h}\int_{y_{h-1}}^{y_h} y^2 f(y)dy-\mu_h^2$$

ومتوسط المجتمع في الطبقة h هو μ_h ويعطى بالعلاقة التالية

$$\mu_h=\frac{1}{W_h}\int_{y_{h-1}}^{y_h} y\, f(y)dy$$

على فرض ان y_h (i=1,2,3, . . . L-1) هي مجموعة الحدود المثلى للطبقات ضمن الفترة $[a,b]$ ل y بحيث يكون التباين المقدر اقل ما يمكن.[Lachan,R.(1985).PP.1053]

وكذلك نجد أن

$$W_h=\int_{y_{h-1}}^{y_h} f(y)dy$$

نفرض أن $f(y)$ يمكن إن نقربها إلى قيمتها المتوسطة μ_h داخل الطبقة h .[AL_Hasso.1996. PP.38] وعليه فان

$$W_h = \int_{y_{y-1}}^{y_h} \mu_h dy = \mu_h \int_{y_{h-1}}^{y_h} dy = \mu_h [y]_{y_{h-1}}^{y_h} = \mu_h [y_h - y_{h-1}] \quad -------(2-12)$$

وعليه

$$\mu_h = \frac{1}{W_h}\int_{y_{h-1}}^{y_h} y f(y)dy = \frac{1}{W_h}\int_{y_{h-1}}^{y_h} y \mu_h dy = \frac{\mu_h}{W_h}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_{h-1}}^{y_h} = \frac{\mu_h}{2W_h}\left(y_h^2 - y_{h-1}^2\right)$$

وبالتعويض عن قيمة W_h نحصل على

$$\mu_h = \frac{\mu_h (y_h^2 - y_{h-1}^2)}{2\mu_h (y_h - y_{h-1})} = \frac{y_h - y_{h-1}}{2} \quad ------(2-13)$$

$$\sigma_h^2 = \frac{1}{W_h}\int_{y_{h-1}}^{y_h} y^2 f(y)dy - \mu_h^2 \quad = \frac{1}{W_h}\int_{y_{h-}}^{y_h} y^2 \mu_h dy - \mu_h^2$$

$$= \frac{\mu_h}{W_h}\int_{y_{h-1}}^{y_h} y^2 dy - \mu_h^2 = \frac{\mu_h}{3W_h}[y^3]_{y_{h-1}}^{y_h} - \mu_h^2 = \frac{\mu_h}{3W_h}\left[y_h^3 - y_{h-1}^3\right] - \mu_h^2$$

وبالتعويض عن قيمة W_h من المعادلة (2-12) نحصل على

$$\sigma_h^2 = \frac{\mu_h (y_h^3 - y_{h-1}^3)}{3\mu_h (y_h - y_{h-1})} - \mu_h^2 \quad = \frac{\mu_h (y_h^2 + y_h y_{h-1} + y_{h-1}^2)}{3\mu_h} - \mu_h^2$$

وبالتعويض عن قيمة μ_h^2 نحصل على

$$\sigma_h^2 = \frac{y_h^2 + y_h y_{h-1} + y_{h-1}^2}{3} - \frac{y_h^2 + 2 y_h y_{h-1} + y_{h-1}^2}{4}$$

$$= \frac{y_h^2 - 2 y_h y_{h-1} + y_{h-1}^2}{12} \quad = \frac{(y_h^2 - y_{h-1}^2)^2}{12} \quad -------------(2-14)$$

ولكن

$$D_h(y) = \int_{y_{h-1}}^{y_h} f^{7/8}(y)dy = \int_{y_{h-1}}^{y_h} \mu_h^{7/8} dy = \mu_h^{7/8} y_{y_{h-1}}^{y_h} = \mu_h^{7/8}(y_h - y_{h-1})$$

وعليه فان

$$\mu_h^{7/8} = \frac{D_h(y)}{(y_h - y_{h-1})}$$

لذا فان

$$\mu_h = \frac{D_h^{8/7}(y)}{(y_h - y_{h-1})^{8/7}} ------------------ (2-15)$$

بما إن التباين للوسط الحسابي الطبقي $V(\overline{y}_{st})$ باستخدام التوزيع النسبي والمعطى بالمعادلة (1-9) هو

$$V_{prop}(\overline{y}_{st}) = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L} W_h\, \sigma_h^2$$

وبالتعويض عن (2-13),(2-14),(2-15) في المعادلة أعلاه لنحصل عل

$$V_{prop}(\overline{y}_{st}) = \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{L} \mu_h (y_h - y_{h-1}) - \frac{(y_h - y_{h-1})^2}{12} \quad = \frac{1}{12n}\sum_{h=1}^{L} \mu_h (y_h - y_{h-1})^3$$

$$= \frac{1}{12n}\sum \frac{D_h^{7/8}(y)}{(y_h - y_{h-1})^{7/8}}(y_h - y_{h-1})^3 ----------- (2-16)$$

بما إن $\sum D_h(y) = D(y)$ هو مستقل عن اختيار حدود الطبقات وان المعادلة(2-16)تصبح اقل ما يمكن عندما $D_h(y)$ هو ثابت لجميع قيم h . أي إن

$$\sum_{h=1}^{L} D_h(y) = D(y)$$

$$L\, D_h(y) = D(y)$$

$$D_h(y) = \frac{D(y)}{L} ----------------------- (2-17)$$

ومن ذلك نستنتج إن تباين الوسط الحسابي الطبقي يكون في صورته النهائية كالأتي

$$V_{prop}(\overline{y}_{st}) = \frac{1}{12n}.L.\frac{D^{8/7}(y)}{L^{8/7}}.L^{8/7}.\frac{1}{L^3} \;=\; \frac{1}{12nL^2} D^{8/7}(y)$$

$$\underset{prop}{V}(\bar{y}_{st}) = \frac{D^{8/7}(y)}{12nL^2} \qquad ------------------------(2-18)$$

المبحث الثالث

المقارنة والاستنتاجات

(3-1) المقدمة

في هذا البند يتم إجراء المقارنة بين الطريقة المقترحة $Cum.f^{7/8}$ والطرق التقريبية الأخرى المذكورة في البند السابق . حيث تتم المقارنة بالاعتماد على التباين.

(3-2)المقارنة بالاعتماد على التباين Comparison Concerning Variances.

وسنقوم بإجراء مقارنة بالاعتماد على التباين بين الطريقة المقترحة والطرق الواردة في المعادلات (2-2) ,(2-4) ,(2-6) ,(2-8) ,(2-18) على التوزيعات التالية.

(3-2-1) التوزيع المنتظم .Uniform Distribution

بدالة كثافة احتمالية

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d} & c < y < c + d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ولكي نحسب التباين من المعادلات (2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,18) يجب إن نحسب اولآ $D^{8/7}(y)$, $C^{6/5}(y)$, $M^{3/2}(y)$, $H^3(y)$, $K^2(y)$ وعلى النحو التالي. سوف نحسب $D^{8/7}(y)$

لدينا

$$D(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{7/8}(y)dy$$

$$= \int_{c}^{c+d} \left(\frac{1}{d}\right)^{7/8} dy = \left(\frac{1}{d}\right)^{7/8} (y)_c^{c+d} = \left(d^{-7/8}\right)(d) = d^{1/8}$$

ومنه نجد إن

$$D^{8/7}(y) = d^{1/7} \quad ,C^{6/5}(y) = d^{1/5} \quad ,M^{3/2}(y) = d^{1/2} \quad ,H^3(y) = d^2 \quad ,K^2(y) = d$$

وبما إن قيم n (حجم العينة) مجهولة فانه يمكن إعادة كتابة المعادلات (2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,18) بالشكل التالي

$$n\,V_1 = n\,\overset{*}{V}(\bar{y}_{st}) = \frac{K^2(Y)}{12L^2} = \frac{d}{12L^2}$$

$$n\,V_2 = n\,\overset{**}{V}(\bar{y}_{st}) = \frac{H^3(y)}{12L^2} = \frac{d^2}{12L^2}$$

$$n\,V_3 = n\,\overset{***}{V}(\bar{y}_{st}) = \frac{M^{3/2}(y)}{12L^2} = \frac{d^{1/2}}{12L^2}$$

$$n\,V_4 = n\,\overset{****}{V}(\bar{y}_{st}) = \frac{C^{6/5}(y)}{12L^2} = \frac{d^{1/5}}{12L^2}$$

$$n\,V_5 = n\,\overset{*****}{V}(\bar{y}_{st}) = \frac{D^{8/7}(y)}{12L^2} = \frac{d^{1/7}}{12L^2}$$

الجدول (3-1) يوضح قــيم $n\,V_1, n\,V_2, n\,V_3, n\,V_4, n\,V_5$ اعتمــادا علــى التوزيع المنتظم

عندما (L=1 , 2 , 3 , . . . ,11) و (d= 2 , 4 , 10)

d	L	nV_1	nV_2	nV_3	nV_4	nV_5
2	1	0.167	0.333	0.118	0.0960	0.0920
	2	0.0417	0.0833	0.0295	0.0239	0.0229
	3	0.0185	0.0370	0.0131	0.0106	0.0102
	4	0.0104	0.0208	0.0074	0.0060	0.0057
	5	0.0067	0.0013	0.0047	0.0038	0.0037
	6	0.0046	0.0093	0.0033	0.0027	0.0025
	7	0.0034	0.0068	0.0024	0.0020	0.0019
	8	0.0026	0.0052	0.0018	0.0015	0.0014
	9	0.0021	0.0041	0.0015	0.0012	0.00113
	10	0.0017	0.0033	0.0012	0.00096	0.00092
	11	0.0014	0.0028	0.00097	0.00079	0.00076
4	1	0.333	1.333	0.167	0.120	0.1015
	2	0.0830	0.333	0.0417	0.0275	0.0254
	3	0.0370	0.148	0.0185	0.0122	0.011287
	4	0.0208	0.0833	0.0104	0.0069	0.00635
	5	0.0133	0.0533	0.0067	0.0044	0.00406
	6	0.0093	0.0370	0.0046	0.0031	0.00282
	7	0.0068	0.277	0.0034	0.0022	0.00207
	8	0.0052	0.0208	0.0026	0.0017	0.001587
	9	0.0041	0.0165	0.0021	0.0014	0.00125
	10	0.0033	0.0133	0.0017	0.0011	0.001015
	11	0.0028	0.0110	0.0014	0.00091	0.000839
10	1	0.83	8.33	0.26	0.33	0.115
	2	0.21	2.08	0.068	0.033	0.0289
	3	0.093	0.93	0.026	0.015	0.01286
	4	0.052	0.52	0.016	0.0083	0.0072

	5	0.033	0.33	0.012	0.0053	0.00463
	6	0.023	0.23	0.0073	0.0037	0.003216
	7	0.017	0.17	0.0054	0.0030	0.00236
	8	0.013	0.13	0.0041	0.0021	0.001809
	9	0.010	0.10	0.0033	0.0016	0.0014
	10	0.0083	0.083	0.0026	0.0013	0.001158
	11	0.0069	0.069	0.0022	0.0011	0.0009569

نلاحظ من الجدول إن تباين الوسط الحسابي الطبقي nV_5 يكون اقل من تباين الوسط الحسابي الطبقي في الطرق الأخرى مهما تغيرت قيمة d وهذا يدل على إن هذه ألطريقه أفضل من الطرق الأخرى تحت التوزيع المنتظم.

(3-2-2) التوزيع الطبيعي **Normal Distribution**

بدالة كثافة احتمالية

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\pi^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

ولكي نحسب التباين من المعادلات (2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,18) يجب إن نحسب اولآ $D^{8/7}(y), C^{6/5}(y), M^{3/2}(y), H^{3}(y), K^{2}(y)$ وعلى النحو التالي

$$D(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \right]^{7/8} dy$$

بفرض

$$x = \frac{y-\mu}{\sigma} \;\Rightarrow\; \sigma x = y-\mu \;\Rightarrow\; \sigma dx = dy$$

$$D(y) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{7/8} 2\int_{0}^{\infty} e^{\frac{-7x^2}{16}} \sigma \, dx$$

$$u = \frac{7X^2}{16} \Rightarrow X = \sqrt{\frac{u}{7}} \quad \Rightarrow dX = \frac{4du}{2\sqrt{7u}} = \frac{2du}{\sqrt{7u}}$$

وعليه فآن

$$D(y) = 2\sigma \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^{7/8} \int e^{-\mu} \; \frac{2du}{\sqrt{7u}}$$

$$= \frac{4\sigma^{1/8}\,\pi^{1/16}}{\left(2^{7/16}\right)\left(7^{1/2}\right)} \quad = \frac{4.296776672\,\sigma^{1/8}}{3.583023389} = 1.199204193\,\sigma^{1/8}$$

ومنه نستنتج أن

$$D^{8/7}(y) = (1.199204193)^{8/7} . \sigma^{1/7} \quad = 1.230732266\sigma^{1/7}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$K^{2}(y) = 5.013\sigma$$

$$H^{3}(y) = 32.648\sigma^{2}$$

$$M^{3/2}(y) = 2.146\sigma^{1/2}$$

$$C^{6/5}(y) = 1.341\sigma^{1/5}$$

وبالتالي سيكون

$$nV_1 = \frac{5.013\sigma}{12L^2}$$

$$nV_2 = \frac{32.648\sigma^2}{12L^2}$$

$$nV_3 = \frac{2.146\sigma^{1/2}}{12L^2}$$

$$nV_4 = \frac{1.3416\sigma^{1/5}}{12L^2}$$

$$nV_5 = \frac{1.231\sigma^{1/7}}{12L^2}$$

الجدول (3-2) يوضح قيم $nV_5, nV_4, nV_3, nV_2, nV_1$ اعتمادا على التوزيع الطبيعي

عندما $(L = 1,2,3, . . . ,11)$ و$(\sigma = 0.21 ,5 , 10)$

σ	L	nV_1	nV_2	nV_3	nV_4	nV_5
0.21	1	0.088	0.119	0.082	0.081	0.0820647
	2	0.022	0.030	0.0205	0.0204	0.0205162
	3	0.00970	0.013	0.00910	0.00900	0.009118303
	4	0.00548	0.00759	0.00512	0.00511	0.005129
	5	0.00350	0.00480	0.00328	0.00327	0.0032826
	6	0.00244	0.00333	0.00228	0.00227	0.00228
	7	0.001790	0.002450	0.001672	0.001669	0.00167
	8	0.001371	0.001875	0.001280	0.001278	0.001282
	9	0.001083	0.001875	0.001012	0.001001	0.001013
	10	0.008773	0.001199	0.0008195	0.0008177	0.0008206
	11	0.000725	0.000991	0.000677	0.000675	0.000678
5	1	2.09	68.02	0.39	0.15	0.1290

	2	0.52	17.004	0.090	0.04	0.0322
	3	0.23	7.56	0.040	0.010	0.0143
	4	0.13	4.25	0.020	0.0096	0.00806
	5	0.083	2.721	0.016	0.00617	0.00516
	6	0.058	1.889	0.011	0.00428	0.00358
	7	0.0426	1.388	0.00816	0.00315	0.00263
	8	0.033	1.063	0.00625	0.00241	0.00201
	9	0.026	0.839	0.0049	0.00190	0.00159
	10	0.021	0.687	0.00399	0.00154	0.00129
	11	0.017	0.562	0.00330	0.00127	0.00106
10	1	4.178	272.069	0.565	0.177	0.142
	2	1.044	68.02	0.141	0.044	0.035
	3	0.464	30.229	0.062	0.019	0.0158
	4	0.261	17.004	0.035	0.011	0.0089
	5	0.167	10.882	0.022	0.0071	0.0057
	6	0.116	7.557	0.016	0.0049	0.0039
	7	0.085	5.552	0.0115	0.0036	0.0029
	8	0.065	4.251	0.0088	0.0028	0.0022
	9	0.052	3.359	0.0070	0.0022	0.0015
	10	0.042	2.721	0.0057	0.0018	0.0014
	11	0.034	2.248	0.0046	0.0014	0.0011

من الجدول نلاحظ إن قيم تباين الوسط الحسابي الطبقي nV_5 تكون اقل من تباين الوسط الحسابي الطبقي للطرق الأخرى عندما تكون σ كبيرة نسبيا ، أي إن هذه الطريقة تكون ليست هي الأفضل في حالة التوزيع الطبيعي عندما تكون $\sigma = 0.21$ بينما تكون هذه ألطريقه هي الأفضل في حالة $\sigma = 5$, $\sigma = 10$

(3-2-3)التوزيع الآسي Exponential Distribution

بدالة كثافة احتمال

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \lambda > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ولكي نحسب التباين من المعادلات (2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,18) يجب إن نحسب اولآ $D^{8/7}(y)$, $C^{6/5}(y)$, $M^{3/2}(y)$, $H^3(y)$, $K^2(y)$ وعلى النحو التالي

$$D(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{7/8}(y)dy = \int_{0}^{\infty} \left(\lambda e^{-\lambda y}\right)^{7/8} dy = \lambda^{7/8}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-7\lambda y/8}\right)dy = \lambda^{7/8}.\frac{-8}{7\lambda}\int_{0}^{\infty}\left(e^{-7\lambda y/8}\right)\left(\frac{-7\lambda}{8}\right)dy$$

$$= \frac{8}{7}\lambda^{-1/8}\left(-e^{-7\lambda y/8}\right)_0^{\infty} = \frac{8}{7}\lambda^{-1/8}(1) = \frac{8}{7\sqrt[8]{\lambda}}$$

وعلية فان

$$D^{7/8}(y)=\left(\frac{8}{7}\lambda^{-1/8}\right)^{8/7}=\left(\frac{8}{7}\right)^{8/7}\lambda^{-1/7}=1.164867453\,\lambda^{-1/7}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$K^2=4\lambda^{-1}$$

$$H^3=27\lambda^{-2}$$

$$M^{3/2}=1.8371173\lambda^{-1/2}$$

$$C^{6/5}=1.245\lambda^{-1/5}$$

وبالتالي سيكون لدينا

$$nV_1=\frac{4.\lambda^{-1}}{12L^2}$$

$$nV_2=\frac{27.\lambda^{-2}}{12L^2}$$

$$nV_3=\frac{1.8371173.\lambda^{-1/2}}{12L^2}$$

$$nV_4=\frac{1.245.\lambda^{-1/5}}{12L^2}$$

$$nV_5=\frac{1.164867453.\lambda^{-1/7}}{12L^2}$$

الجدول (3-3) يوضح قيم $nV_5, nV_4, nV_3, nV_2, nV_1$ اعتمادا علـــى التوزيـــع الآسي

عندما (L =1,2,3, . . . ,11) و (λ = 0.1, 2.5, 3.6)

λ	L	nV_1	nV_2	nV_3	nV_4	nV_5
0.1	1	3.333	225	0.483	0.164	0.135
	2	0.833	56.25	0.121	0.041	0.034
	3	0.370	25	0.053	0.0182	0.01499
	4	0.208	14.063	0.030	0.0103	0.0084
	5	0.133	9	0.019	0.0066	0.0054
	6	0.093	6.25	0.013	0.0046	0.0037
	7	0.068	4.592	0.0098	0.0034	0.0028
	8	0.052	3.516	0.0075	0.0026	0.0021
	9	0.041	2.778	0.0059	0.0020	0.0017
	10	0.033	2.25	0.0048	0.0016	0.0014

	11	0.028	1.860	0.0039	0.0014	0.0011
2.5	1	0.133	0.36	0.097	0.086	0.085
	2	0.033	0.09	0.024	0.022	0.021
	3	0.015	0.04	0.011	0.0096	0.0095
	4	0.0083	0.023	0.0060	0.0054	0.0053
	5	0.0053	0.014	0.0039	0.0035	0.0034
	6	0.0037	0.01	0.0027	0.0024	0.0024
	7	0.0027	0.0073	0.0020	0.0018	0.0017
	8	0.0021	0.0056	0.0015	0.0013	0.0013
	9	0.0016	0.0044	0.0012	0.0011	0.00105
	10	0.0013	0.0036	0.00097	0.00083	0.00085
	11	0.001	0.0030	0.00080	0.00071	0.00070
3.6	1	0.093	0.174	0.0804	0.0803	0.0808
	2	0.023	0.043	0.0201	0.0200	0.0202
	3	0.010	0.019	0.00894	0.00892	0.00898
	4	0.0058	0.011	0.00503	0.00502	0.00505
	5	0.0037	0.0069	0.00322	0.00321	0.00323
	6	0.0026	0.0048	0.00224	0.00223	0.00225
	7	0.0015	0.0035	0.001641	0.001638	0.001649
	8	0.0013	0.0027	0.001256	0.001254	0.001263
	9	0.0011	0.0021	0.0009929	0.0009913	0.00099802
	10	0.00092	0.0017	0.0009914	0.0009961	0.0008084
	11	0.00077	0.0014	0.0006646	0.0006636	0.0006681

من الجدول نلاحظ إن قيم تباين الوسط الحسابي الطبقي nV_5 تكون اقل من تباين الوسط الحسابي الطبقي للطرق الأخرى عندما تكون قيم λ اصغر من (2.5) مما يدل على إن هذه الطريقة تكون هي الافضل، بينما تكون هذه الطريقة ليست هي الأفضل عندما تكون λ اكبر من (2.5)

(3-3) الاستنتاجات Conclusions

اظهرت طريقة $\mathrm{cum}\ f^{7/8}$ أنها أكثر كفاءة من الطرق الأخرى التي درست في حالة التوزيع المنتظم حيث وجد إن $nV(\bar{y}_{st})$ في هذه الطريقة اقل من $nV(\bar{y}_{st})$ في الطرق الأخرى في حالة التوزيع المنتظم .إما في حالة التوزيع الطبيعي فان قيمة $nV(\bar{y}_{st})$ تكون اقل من قيم تباين الوسط الحسابي الطبقي للطرق الأخرى عندما تكون قيم σ كبيرة نسبيا ،أي إن هذه الطريقة ليست هي الأفضل في حالة $\sigma = 0.21$ بينما تكون هذه الطريقة هي الأفضل في حالة $\sigma = 5$, $\sigma = 10$. إما في حالة التوزيع الآسي فان قيمة $nV(\bar{y}_{st})$ تكون اكبر من تباين الوسط الحسابي الطبقي للطرق الأخرى عندما تكون قيمة $\lambda = 3.6$ بينما تكون قيم تباين الوسط الحسابي الطبقي اقل في هذه ألطريقه في حالة $\lambda = 0.1$, $\lambda = 2.5$. ومن ذلك نستنتج ان هذه الطريقه هي افضل الطرق المستخدمه الى حد ما. ولكن بالرغم من ذلك نعتقد امكانية دراسات اخرى للوصول الى حل تقريبي أفضل.

المصادر

1. -AL-Daghistani, Taymoor Hisham. (1995)."An Approximately Optimal Stratification Using Proportional Allocation".M.S.C University of Mosul.
2. AL-Hasso, Azhar abdulrazaq.(1996)."A Method For Obtaining Stratum Boundaries Using Neyman Allocation" M.S.C Thesis University of Mosul.
3. -AL-Kassab. MMT. (1993)." Approximately Optimal Stratitication Using Proportional Allocation".J of Tanmiat AL-Rafidain.
4. -Iachan ,R.(1985) "Optimum Stratum Boundaries For Shellfish surveys" ,J.Of Biometrics.
5. -Serfling.R.S.(1968)."Approximately Optimal Stratitication" J.Amer Stat.Ass.
6. -Thomsen Ib (1976)."Acomparison of Approximately Optimal Stratification Given Proportional Allocation With Other Methods of Stratification and Allocation" Metrika. Band 23.