

توليد مصفوفة معدل الانتقال (TRM) للتوزيع الاسي
مدرس مساعد: مشتاق طالب حسين
جامعة الانبار
كلية الادارة والاقتصاد

الملخص

في بعض الاحيان عملية صفوف الانتظار لايمكن حلها وبالتالي لايمكن الوصول الى حالة الاستقرار الا اذا استخدم الحل الانتقالي. هذه الحالة تحدث عندما نظام الانتظار يعمل لفترة زمنية قصيرة، معدلات الوصول والخدمة متذبذبة مع الوقت ومحطة الخدمة تعمل بشكل متقطع . في هذا البحث درسنا السلوك الانتقالي لاحد التوزيعات الطورية الذي هو التوزيع الاسي، ان معامل الاختلاف التريبيعي لهذا التوزيع مساوي للعدد 1 هذا يعني ان الزبون سوف يكمل طور واحد في محطة الوصول ويكمل طور واحد في محطة الخدمة. الحالة التي فرضناها يكون فيها توزيعا اوقات الوصول البيني والخدمة حسب التوزيع الاسي، محطة خدمة واحدة، طاقة النظام محددة وطاقة المجتمع لانهاية . بعد ذلك قمنا بتوليد المعادلات التفاضلية الخاصة بالنظام وحل هذه المعادلات بواسطة طريقة رونج-كوتا ذات الرتبة الرابعة وبالتالي الحصول على الحل الانتقالي وحل حاله الاستقرار .

Generation The Transition Rate Matrix (TRM) for Exponential
Distribution

Abstract

In some times queuing process does not found solution and so not reach to steady state. If not use transient solution. This case happen when the queuing system is work for short time, arrival and service rates are fluctuation with time and service station is work intermittently. In this research we study the transient behavior for one of phase distributions which is exponential distribution; the square coefficient of variation to this distribution is equal to one. That is the customer will complete one phase in arrival station and one phase in service station. The case that we assume it is inter arrival and service times are exponentially distributed, single service station, finite system capacity, and infinite population capacity. After that we generate differential equation for this system and we solved this equation by using Rung- Kutta order 4 method, and so obtain on the transient solution and steady state solution.

الجانب النظري

1- المقدمة Introduction

إن الدراسات التحليلية تسهم في الوصول إلى المؤشرات المناسبة التي بدورها تخدم المجتمع، إذ يعد بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرز تطبيقها نجاحاً واسعاً في المجالات المدنية والعسكرية على السواء. هناك أساليب كثيرة لبحوث العمليات، وفي هذا البحث تم انتقاء إحدى هذه الأساليب ألا وهي نظرية صفوف الانتظار أو ما يسمى بخطوط الانتظار (Waiting Lines).

2 - هدف البحث Aim of research

يهدف هذا البحث في التعرف على السلوك الانتقالي لمنظومة الانتظار ($M/M/1/GD/N/\infty$)، والوصول إلى حلول حالة الاستقرار لأنظمة الانتظار الماركوفية ذات المرحلة الواحدة وذلك عن طريق إيجاد الحل العددي (numerical solution) لتلك الأنظمة .

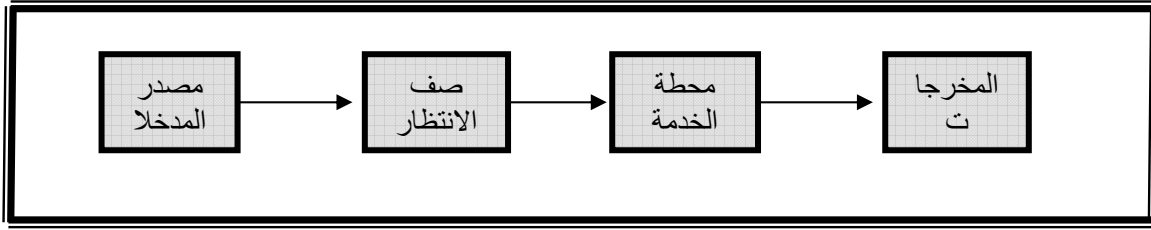
3 -نظرية صفوف الانتظار queuing theory

إن نظرية صفوف الانتظار هي دراسة رياضية لما يسمى بالانتظار (queue) أو خطوط الانتظار (waiting lines) وهذه الظاهرة شائعة في الحياة اليومية مثل محطة الوقود، والمطارات، وورش الصيانة وغيرها من الأمثلة اليومية الشائعة، يحدث الانتظار عندما يكون الطلب على الخدمة أعلى من طاقة نظام الخدمة، وأن من الصعوبة التنبؤ بعدد الزبائن الواصلين وكذلك الوقت الذي يستغرقه الزبون في محطة الخدمة لهذا تكون عملية الحصول على مقاييس الأداء ضرورية قبل تنفيذ منظومات صفوف الانتظار. عندما تكون طاقة نظام الخدمة عالية جداً فإن هذا يؤدي إلى تحميل النظام كلفاً عالية، ومن جانب آخر عندما تكون طاقة نظام الخدمة قليلة (غير كافية) لخدمة الزبون فإن ذلك يؤدي إلى زيادة وقت الانتظار في صف الانتظار من ثم تحميل النظام كلفة انتظار عالية فضلاً عن فقدان النظام لزيائنه، لذلك توجهت الأنظار إلى ما يسمى بنظرية صفوف الانتظار لحل مثل هذه المشاكل من ثم التوصل إلى موازنة في عمل النظام.

3.1 - العناصر الأساسية لمنظومات صفوف الانتظار Basic Elements of Queuing

System

إن العمل الأساسي لأغلب أنظمة صفوف الانتظار يفترض بأن الزبائن الواصلين إلى النظام هم بحاجة إلى خدمة معينة والذين هم يمثلون مصدر المدخلات للنظام (Input source)، هؤلاء الزبائن الواصلون سيدخلون إلى منظومة الانتظار ومن ثم يلتحقون بصف الانتظار وأن الزبون في صف الانتظار سوف يختار للدخول إلى محطة الخدمة ويحصل على الخدمة الخاصة به وفق أسلوب معين يضعه نظام الخدمة بعد دخول الزبون إلى محطة الخدمة وحصوله على الخدمة فإنه سوف يغادر نظام الانتظار وهذا موضح في المخطط (3-1)



المخطط (3-1) منظومة صفوف الانتظار (Queuing System)

وان خصائص أي نظام انتظار من الممكن إيضاحها من خلال الأتي:

3.1.1- عملية الوصول Arrival Process

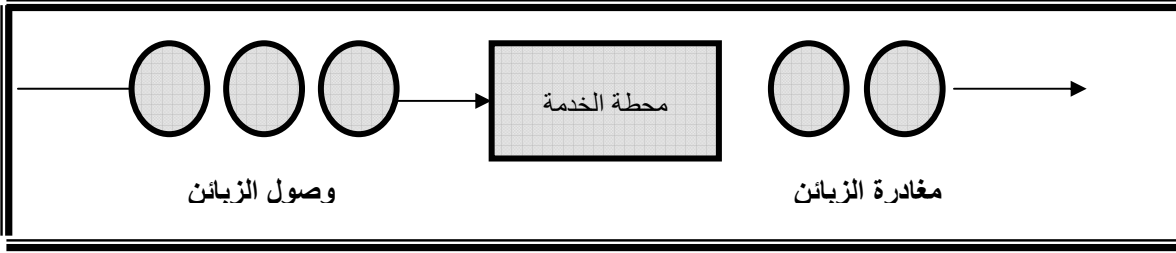
إن عملية الوصول تشير إلى الخصائص الأساسية لوصول الزبائن إلى محطة الخدمة ومن الطبيعي عدم إمكانية جدولة أزمانه الوصول بصورة دقيقة وان أمكن ذلك فإنه سيقودنا إلى تجنب تشكيل صفاً للانتظار. وتقاس عملية الوصول بمعدل طول المدة الزمنية التي تفصل بين وصول واخر (Interarrival time)) أو بمعدل عدد الزبائن الواصلين خلال مدة زمنية معينة، ان الزمن الذي يفصل بين وصول زبون واخر لمحطة الخدمة يمكن ان يحدد بواسطة دالة الكثافة الاحتمالية له (Probability density function (PDF)) وان اكثر التوزيعات الاحتمالية شيوعاً التي تصف عملية الوصول هو التوزيع الاحتمالي المتقطع (Poisson) ، فإذا كان وصول الزبائن لمحطة الخدمة في الأزمنة $t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}$ إذ أن $t_1 > 0, t_2 > t_1 > 0, \dots, t_{n+1} > t_n$ وان $(t_{n+1} - t_n)$ يمثل الزمن بين وصول الزبون $n+1$ والزبون n .

3.1.2- عملية الخدمة Service process (Departure)

إن عملية الخدمة توصف من خلال التوزيع الاحتمالي للزمن المطلوب لتقديم الخدمة لزبون معين، لذلك فإن أوقات الخدمة تختلف على نحو واسع ويمكن عدّها متغيّراً عشوائياً وفي حالات قد يتطلب الأمر نفس المدة الزمنية لتقديم خدمة محددة فإنه يمكن التعبير عنها بكونها ثابتة (Constant) ، أي ان التوزيع يكون محدداً (Deterministic distribution) ، تقاس عملية الخدمة بمعدل عدد الزبائن الذين تتم خدمتهم خلال مدة زمنية معينة او بمعدل طول المدة الزمنية المطلوبة لخدمة زبون واحد. ان محطة الخدمة يجب ان تكون ملائمة للتعامل مع الزبائن طالبي الخدمة حيث يجب ان يكون معدل الخدمة على الاقل مساوياً لمعدل الوصول وبخلافه فان عدد الزبائن المنتظرين سيكون كبيراً جداً.

3.1.3- عدد قنوات الخدمة Number of Service channels

إن عدد قنوات الخدمة يشير إلى عدد محطات الخدمة التي سيدخلها الزبون لتلقي الخدمة الخاصة به والمخطط (3-2) يوضح نظام خدمة أحادي (محطة خدمة ذات قناة خدمة واحدة)



مخطط (3-2) منظومة خدمة ذو محطة خدمة واحدة Service System With Single Server

3.1.4 - طاقة النظام System capacity

هي أقصى عدد مسموح به من الزبائن الذي يمكن ان يستوعبهم النظام، ويرمز له بالرمز N ، عندما يصل النظام إلى طاقته القصوى لا يمكن لأي زبون الدخول إلى النظام ما لم تكمل خدمة زبون واحد من الأقل في النظام، ومن مشاكل منظومات صفوف الانتظار المحدودة الاستيعاب هو مغادرة الزبائن إلى منظومات أخرى لتلبية احتياجاتهم.

3.1.5 - حجم المجتمع Population Size

إحدى صفات مصدر المدخلات (المجتمع) هي حجمه، الحجم هو العدد الكلي من الزبائن الموجودين في النظام الذين يحتاجون إلى خدمة في كل مدة زمنية. إن هذا الحجم من الممكن عده محدد (Limited) أو غير محدد (infinite) بحيث أن مصدر المدخلات اما أن يكون محددًا أو غير محدد.

3.1.6 - نظام صف الانتظار Queue Discipline

إن نظام الانتظار هو وصف للطريقة التي يتم فيها تحديد الزبائن اللذين سيحصلون على الخدمة ويكون هذا التحديد على وفق أربع حالات هي :

- FCFS (first come first service) = من يأتي اولاً يخدم اولاً.
- LCFS (last come first service) = من يأتي اخراً يخدم اولاً.
- SIRO (service in random order) = نظام الخدمة بشكل عشوائي.

- GD (general discipline) = نظام صفوف الانتظار العام

(يشمل اي حالة من الحالات الثلاثة اعلاه).

3.2 - رموز منظومات صفوف الانتظار

ان الوصف العام للأنموذج الرياضي لصفوف الانتظار يبين من خلال الجدول (3-1)

الجدول (3-1) السلسلة الرمزية لنظام صف الانتظار

الرمز	التفسير
A(t)	التوزيع الاحتمالي لأوقات الوصول البيني ما بين الزبائن .في هذا البحث A(t) يتوزع توزيعا اسيا اي يرمز له بالرمز M
B(t)	التوزيع الاحتمالي لأوقات الخدمة . في هذا البحث B(t) يتوزع توزيعا اسيا اي يرمز له بالرمز M
m	عدد قنوات الخدمة لنظام الانتظار
N	طاقة النظام
P	حجم المجتمع
QD	نوع نظام الخدمة الذي يستخدمه نظام الانتظار

3.3 التوزيعات الطورية Phase Distributions

3.3.1 - المقدمة

إن أوقات الوصول البيني بين زبون واخر (Interarrival-Time) وأوقات الخدمة (Service Time) هي متغيرات عشوائية (Random Variables) وهي من الممكن ان تكون محددة بتوزيع احتمالي معين.

في هذه الفقرة سوف تحلل وتخصص المتغيرات العشوائية إلى نوع من التوزيعات الاحتمالية الا وهو التوزيع الاسي (Exponential Distribution)، وان تخصيص هذه المتغيرات العشوائية يكون عن طريق دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للتوزيع الاسي. كذلك سيتم التعرف على الوسط الحسابي، التباين ومعامل الاختلاف للتوزيع أعلاه وذلك من خلال دالة تحويل لابلاس (Laplace Transform) .

3.4 - أنواع التوزيعات الطورية Phase Type Distributions

في هذه الفقرة سنتعرف على واحد من التوزيعات الطورية المهمة ، والمستخدم بكثرة في أنظمة صفوف الانتظار، وهو التوزيع الاسي .

3.4.1 - التوزيع الاسي Exponential Distribution

تتصف أوقات الوصول البيني بين زبون واخر بالاستمرارية وبذلك يكون التوزيع الاحتمالي المستمر والمعروف بالتوزيع الاسي هو المستخدم لوصف الترتيب العشوائي لأوقات الوصول

البيني بين زبون واخر في نظام الانتظار . حيث ان الزبون يمر بطور واحد سواء في محطة الوصول او الخدمة .

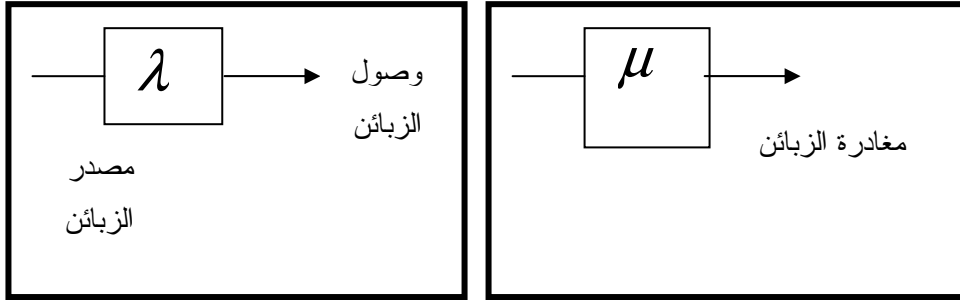
فإذا كانت λ هي معدل عدد الزبائن الواصلين فان دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لوقت الوصول البيني تكون بالصيغة الآتية:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$

اما في محطة الخدمة فان μ هي معدل عدد الزبائن المغادرين لنظام الانتظار ، فان دالة الكثافة الاحتمالية تكون

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0$$

الشكلان (3-3) و (3-4) يبينان محطة وصول ذات طور واحد ومحطة خدمة احادية الطور وعلى التوالي.



شكل (3-4) محطة خدمة احادية الطور شكل (3-3) محطة

وصول احادية الطور

3.4.2- معالم التوزيع الاسي Parameters Of Exponential Distribution

من خلال جداول تحويل لابلاس نحصل على الدالة الآتية:

$$L(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda} \quad \dots\dots\dots (3-1)$$

وبأخذ المشتقة الأولى والثانية للدالة (3-1) نحصل على الوسط الحسابي والتباين للتوزيع الاسي وعلى التوالي.

$$\bar{T} = \left. \frac{-dL(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{\lambda} = \text{mean}$$

$$\sigma_t^2 = \left. \frac{d^2 L(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{\lambda \{0 - 2(\lambda + s)\}}{(\lambda + s)^4}$$

$$\sigma_t^2 = \left. \frac{d^2 L(s)}{ds^2} \right|_{s=0} - (\text{mean})^2$$

$$\sigma_t^2 = \frac{2\lambda^2}{\lambda^4} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \text{variance}$$

$$\therefore C_t^2 = \frac{\sigma_t^2}{(\text{mean})^2} = \frac{1/\lambda^2}{(1/\lambda)^2} = 1$$

إن معامل الاختلاف هذا يمثل التوزيع الاسي، بسبب $C_t^2 = 1$.

3.5- مصفوفة معدل الانتقال Transition Rate Matrix

3.5.1- المقدمة

إن المشكلة الرئيسية في أنظمة صفوف الانتظار هي إيجاد حالة الاستقرار لنظام الانتظار أو إيجاد الحل الانتقالي لأنظمة الانتظار الماركوفية (Markovian Queuing System)، سنتعرف في هذه الفقرة على كيفية توليد مصفوفة معدل الانتقال (TRM) ونستطيع من خلال مصفوفة معدل الانتقال كتابة المعادلات التفاضلية ذات الدرجة الأولى وحلها حلا عدديا والوصول الى حالة الاستقرار للنظام. وأوقات الخدمة قد تكون معتمدة فقط على الزمن t أو تكون معتمدة على عدد الزبائن الموجودين في النظام عند المدة الزمنية t .

3.5.2 منظومة الانتظار $(C_k / C_L / m / N / \infty / GD)$

في هذه الفقرة سيتم التعرف على الصيغة الرياضية للمنظومة $(C_k / C_L / m / N / \infty / GD)$ ، عندما $(K=L=1)$ ، أي ان توزيع الوصول والخدمة يتبع التوزيع الاسي وعدد الاطوار التي يمر بها الزبون سواء في محطة الوصول او الخدمة هو مساوي للعدد 1

من الممكن تعريف او توضيح نموذج منظومة الانتظار من خلال الفرضيات الآتية:

(a) : إن وصول الزبائن وخدمتهم يتصفان بالخصائص العشوائية.

(b) : يكون حجم المجتمع غير محدد (Infinite).

(c) : قد تحدث عملية وقت الوصول البيئي بين زبون واخر حسب تقنية معينة ، بحيث يتوجب على المنظومة في أي وقت (t) تحتوي على زبون واحد فقط، وان هذه التقنية لوقت الوصول البيئي بين زبون واخر تتكون من $K=1$ ، من الاطوار حيث ان :

$$P\{n : C_1, : k, t + \Delta t | n-1 : C_1, k, t\} = \lambda(n, k)\Delta t \quad (3-2)$$

أو بعبارة أخرى . أن الاحتمال الشرطي (لـ (n) من الزبائن الموجودين في النظام) أي أن خروج الزبون من الطور (k) في محطة الوصول ، ووصوله إلى نظام الانتظار خلال المدة

$$P\{n(t + \Delta t) | n-1 : (t)\} = \lambda\Delta t \cdot P(A) \text{ ، هو } (t, t + \Delta t) \text{ الزمنية}$$

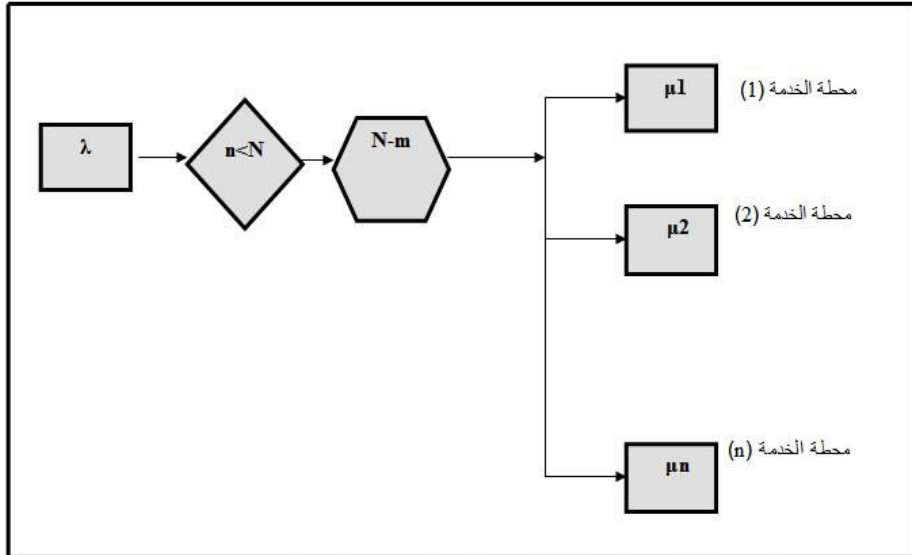
$$P(A) = \lambda\Delta t$$

(d) : إن عملية الخدمة لكل محطة تحدث حسب تقنية معينة ، إذ انه لا يجوز للمحطة الواحدة أن تخدم اكثر من زبون واحد في آن واحد ، وان محطة الخدمة هذه تحتوي على $L=1$ من الأطوار .ويمكن ان نبرهن على ان

$$P\{n : C_1 : k, t + \Delta t | n+1, C_1 : k, t\} = \mu(n, j)\Delta t = P(B) \quad \dots\dots\dots(3-3)$$

أو بعبارة أخرى . ان الاحتمال الشرطي لمغادرة الزبون للطور j بعد إكمال خدمته في محطة الخدمة ومن ثم مغادرته للنظام خلال المدة الزمنية $(t, t + \Delta t)$ هو P(B) .

الشكل (3-5) يبين عمل منظومة انتظار يكون فيها التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيئي واوقات الخدمة يتبعان التوزيع الاسي و (n) من قنوات الخدمة .



الشكل (3-5) عمل منظومة انتظار اسية التوزيع الاحتمالي لاوقات الوصول البيئي والخدمة

3.6 حالات النموذج ومصفوفة معدل الانتقالات لمنظومة

الانتظار $(M / M / m / N / \infty / GD)$

Model State and Transition Rate Matrix for Queuing System

$(M / M / m / N / \infty / GD)$

إن حالات الأنموذج من الممكن وصفها عن طريق الآتي :

$$S_i \in S$$

$$S_i = \{n : C_1 : k, t\}$$

إن ان :

S: هي مجموعة الحالات الممكنة لأنموذج صف الانتظار والتي تكون:

$$= \{1, 2, \dots, nstate\}$$

n state: هي العدد الكلي للحالات.

n : هي عدد الزبائن الموجودين في المنظومة والتي تأخذ عدد صحيح.

$$0 \leq n \leq N$$

N: تمثل طاقة نظام الانتظار .

C_j : تمثل عدد الزبائن الموجودين في كل طور الخدمة (أو تمثل عدد الزبائن الذين سيتم

خدمتهم بنفس العدد من الأطوار ولكل محطة خدمة).

K: يمثل عدد الأطوار الموجودة في محطة الوصول.

L : يمثل عدد الأطوار الموجودة في محطة الخدمة.

لغرض التعرف على كيفية حساب عدد حالات أنموذج منظومة الانتظار ،سيتم ذلك من

خلال الخوارزميات الآتية:

أولاً: الخوارزمية الأولى : تستخدم هذه الخوارزمية في حالة كون عدد محطات الخدمة

لمنظومة الانتظار مساوية لطاقة النظام نفسه (m=N) .

$$nstate = K \left[\sum_{n=0}^m C_n^{L+n-1} \right] \dots\dots\dots(3-4)$$

ثانياً: الخوارزمية الثانية: تستخدم هذه الخوارزمية في حالة كون طاقة منظومة الانتظار

اكبر من عدد محطات الخدمة للمنظومة نفسها،(N>m).

$$nstate = K \left[\sum_{n=0}^m C_n^{L+n-1} + (N - m)C_m^{L+m-1} \right] \dots\dots\dots(3-5)$$

ثالثاً: الخوارزمية الثالثة : تستخدم هذه الخوارزمية في حالة كون عدد محطات الخدمة

لمنظومة الانتظار اكبر من طاقة المنظومة نفسها،(m>N) .

$$nstate = K \left[\sum_{n=0}^N C_n^{L+n-1} \right] \dots\dots\dots(3-6)$$

3.7 الحلول الانتقالية Transient Solution

في بعض الأحيان عملية صفوف الانتظار لا يمكن حلها والتوصل إلى حالة الاستقرار لمنظومة

الانتظار إلا عن طريق الحل الانتقالي (Transient Solution) ، وهذه الحالة تحدث عندما

يكون :

- منظومة الانتظار تعمل لمدة زمنية قصيرة نسبياً .
- معدلات الوصول والخدمة متذبذبة مع الوقت .
- محطة الخدمة تعمل بشكل متقطع (intermittently) .

الجانب التطبيقي

في هذا الجانب سوف نتعرف على كيفية توليد مصفوفة معدل الانتقال لمنظومات الانتظار ذات التوزيع الاسي لاوقات الوصول البيني واوقات الخدمة عندما تكون طاقة النظام محدودة ، واستخراج المؤشرات الخاصة بمنظومة الانتظار التي سيتم افتراضها في الفقرة القادمة..

4.1- توليد مصفوفة معدل الانتقال لمنظومة الانتظار

بعد التعرف على كيفية حساب عدد حالات أنموذج نظام الانتظار من خلال المعادلات الموضحة في الفقرة (3.6) سيتم في هذه الفقرة بيان كيفية توليد مصفوفة معدل الانتقال TRM لنظام الانتظار $M / M / 1 / 15 / \infty / GD$. حيث نفترض في منظومة الانتظار هذه ان اوقات الوصول البيني بين زبون واخر تتبع التوزيع الاسي بمعدل $\lambda=20$ وحدة طالبه للخدمة في الساعة ، واوقات الخدمة تتبع التوزيع الاسي بمعدل $\mu=22$ وحده في الساعة ، عدد قنوات الخدمة $m=1$ قناة خدمة، طاقة النظام محددة $N=15$ وطاقة المجتمع غير محدودة .

ان حجم مصفوفة معدل الانتقال يكون عادة كبيرا جدا وهذا الحجم للمصفوفة يتأثر بعدد الأطوار التي يمر بها الزبون في محطة الوصول أو الخدمة ، وكذلك يتأثر بعدد محطات الخدمة للنظام وطاقة النظام من ثم فان هذا الحجم من المصفوفة يؤدي إلى توليد عدد كبير من المعادلات التفاضلية ذات الدرجة الأولى ، في مثالنا التطبيقي سيكون حجم المصفوفة صغيرا نسبيا بسبب عدد الاطوار التي سيمر بها الزبون في محطة الوصول او الخدمة مساوية الى العدد 1 اي $(K=L=1)$ لان توزيعا اوقات الوصول البيني واوقات الخدمة يتبعان التوزيع الاسي ، وبما ان معامل الاختلاف التربيعي للتوزيع الاسي يكون مساوي الى العدد 1 ، لذلك فان عدد الاطوار في محطة الوصول والخدمة سيكون مساويا الى العدد 1 .

في مصفوفة معدل الانتقال يجب ان يكون حاصل جمع قيم كل عمود من أعمدة المصفوفة مساوي إلى الصفر .

عند توليد مصفوفة معدل الانتقال لهذا النظام ستكون عدد حالات الانموذج هي (16) حالة ، عدد الانتقالات في مصفوفة معدل الانتقال هي (46) انتقاله ، أما عدد المعادلات التفاضلية ذات الدرجة الأولى الخاصة بالنظام فهي (16) معادلة ، بعد إكمال بناء مصفوفة معدل الانتقال وكتابة المعادلات الخاصة بالنظام فان هذه المعادلات تحل حلا عدديا باستخدام طريقة رونج-كوتا ذات الرتبة الرابعة (Runge-Kutta Order 4) والتوصل إلى حالة الاستقرار للنظام وتقدير المؤشرات الخاصة بالنظام .

أما الخطوات التي يجب أن تتبع لتوليد مصفوفة معدل الانتقال الخاصة بهذا النظام هي

كالآتي:

الخطوة الأولى: حساب عدد حالات نموذج نظام الانتظار، من خلال المعادلة التالية وكالاتي

:

$$nstate = K \left[\sum_{n=0}^m C_n^{L+n-1} + (N-m)C_m^{L+m-1} \right]$$

$$nstate = 1 * \left[\sum_{n=0}^1 C_n^{L+n-1} + (15-1)C_1^{L+1-1} \right]$$

$$الخطوة الثانية: بناء جدول يبين الحالات = 1 * [1 + 1 + (14) * 1] = 16$$

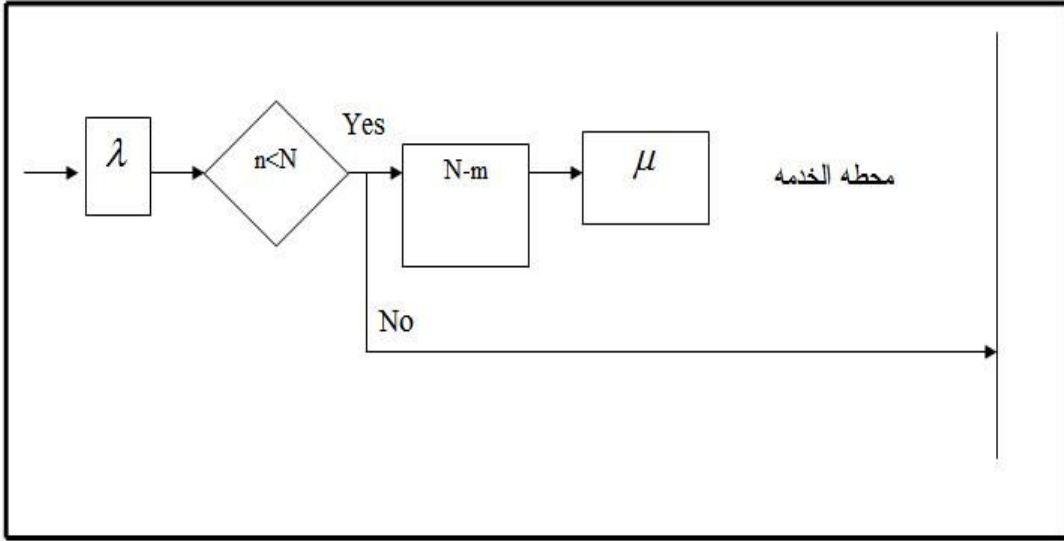
الانتقالية للنظام

جدول (4-1) الحالات الانتقالية لمنظومة الانتظار $M / M / 1 / 15 / \infty / GD$

state	n	q	C	K
1	0	0	0	1
2	1	0	1	1
3	2	0	1	1
4	3	0	1	1
5	4	0	1	1
6	5	1	1	1
7	6	2	1	1
8	7	3	1	1
9	8	4	1	1
10	9	5	1	1
11	10	6	1	1
12	11	7	1	1
13	12	8	1	1
14	13	9	1	1
15	14	10	1	1
16	15	11	1	1

الخطوة الثالثة: بناء مصفوفة معدل الانتقال للنظام والتي نلاحظ فيها انتقالات الزبون لكل حالة من حالات المصفوفة بمعدلات انتقال مقدارها (λ, μ) ، حسب الحالة التي سينتقل من واليها الزبون ،

الخطوة الرابعة: بعد إكمال بناء مصفوفة معدل الانتقال لمنظومة الانتظار اعلاه، نقوم بحل المعادلات التفاضلية التي تم الحصول عليها من خلال المصفوفة، كما ان حل هذه المعادلات يتم من خلال برنامج أعدده الباحث بلغة (Visual Basic) ، وهذا البرنامج يقوم بحساب المؤشرات الخاصة بمنظومة الانتظار اعلاه .



مخطط (4-1) يمثل عمل منظومة الانتظار $M / M / 1 / 15 / GD / \infty$

المعادلات التفاضلية الخاصة بمنظومة الانتظار $M / M / 1 / 15 / GD / \infty$ التي تم الحصول عليها من خلال مصفوفة معدل الانتقال للمنظومة قيد الدراسة .

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \mu p_2(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - (\lambda + \mu) p_2(t) + \mu p_3(t)$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda p_2(t) - (\lambda + \mu) p_3(t) + \mu p_4(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_4(t)}{dt} &= \lambda p_3(t) - (\lambda + \mu) p_4(t) + \mu p_5(t) \\ \frac{dp_5(t)}{dt} &= \lambda p_4(t) - (\lambda + \mu) p_5(t) + \mu p_6(t) \\ \frac{dp_6(t)}{dt} &= \lambda p_5(t) - (\lambda + \mu) p_6(t) + \mu p_7(t) \\ \frac{dp_7(t)}{dt} &= \lambda p_6(t) - (\lambda + \mu) p_7(t) + \mu p_8(t) \\ \frac{dp_8(t)}{dt} &= \lambda p_7(t) - (\lambda + \mu) p_8(t) + \mu p_9(t) \\ \frac{dp_9(t)}{dt} &= \lambda p_8(t) - (\lambda + \mu) p_9(t) + \mu p_{10}(t) \\ \frac{dp_{10}(t)}{dt} &= \lambda p_9(t) - (\lambda + \mu) p_{10}(t) + \mu p_{11}(t) \\ \frac{dp_{11}(t)}{dt} &= \lambda p_{10}(t) - (\lambda + \mu) p_{11}(t) + \mu p_{12}(t) \\ \\ \frac{dp_{12}(t)}{dt} &= \lambda p_{11}(t) - (\lambda + \mu) p_{12}(t) + \mu p_{13}(t) \\ \frac{dp_{13}(t)}{dt} &= \lambda p_{12}(t) - (\lambda + \mu) p_{13}(t) + \mu p_{14}(t) \\ \frac{dp_{14}(t)}{dt} &= \lambda p_{13}(t) - (\lambda + \mu) p_{14}(t) + \mu p_{15}(t) \\ \frac{dp_{15}(t)}{dt} &= \lambda p_{14}(t) - (\lambda + \mu) p_{15}(t) + \mu p_{16}(t) \\ \frac{dp_{16}(t)}{dt} &= \lambda p_{15}(t) - \mu p_{16}(t) \end{aligned}$$

4.2 حلول حالة الاستقرار

بعد اكمال توليد مصفوفة معدل الانتقال لمنظومة الانتظار قيد الدراسة وكتابة المعادلات التفاضلية ذات الدرجة الاولى والخاصة بمصفوفة معدل الانتقال ، نحسب المؤشرات الخاصة لمنظومة الانتظار من خلال ادخال اقيام (λ, μ) والمعادلات التفاضلية الى برنامج خاص قام الباحث بكتابته بلغه (Visual Basic) ، ان هذا البرنامج يعمل لعدد معين من الخطوات (Steps) الى أن تصل المنظومة إلى حالة الاستقرار، إذ سيتم تغيير المدة الزمنية للمنظومة بمقدار (Δt) ولكل خطوة؛ بحيث ان هذه الخطوات تبين عند أي مدة زمنية ستصل المنظومة إلى حالة الاستقرار. وكما موضح في الجدول (4-2) .

جدول (4-2) حلول حالة الاستقرار

Probability	Step 500	Step 1000	Step 2000	Step 2500	step 2600
P ₀	0.1562313	0.2031005	0.17672676	0.11619693	0.11619693
P ₁	0.1402657	0.1679715	0.14724969	0.10563357	0.10563357
P ₂	0.1242488	0.1377056	0.12266758	9.60E-02	9.60E-02
P ₃	0.1085039	0.1117873	0.10216931	8.73E-02	8.73E-02
P ₄	9.34E-02	0.0897737	8.51E-02	7.94E-02	7.94E-02
P ₅	7.91E-02	7.13E-02	7.08E-02	7.21E-02	7.21E-02
P ₆	6.60E-02	5.59E-02	5.90E-02	6.56E-02	6.56E-02
P ₇	5.42E-02	4.33E-02	4.91E-02	5.96E-02	5.96E-02
P ₈	4.38E-02	3.31E-02	4.08E-02	5.42E-02	5.42E-02
P ₉	3.50E-02	2.50E-02	3.40E-02	4.93E-02	4.92E-02
P ₁₀	2.76E-02	1.87E-02	2.83E-02	4.48E-02	4.48E-02
P ₁₁	2.16E-02	1.39E-02	2.35E-02	4.07E-02	4.07E-02
P ₁₂	1.69E-02	1.03E-02	1.96E-02	3.70E-02	3.70E-02
P ₁₃	1.33E-02	7.69E-03	1.63E-02	3.37E-02	3.37E-02
P ₁₄	1.08E-02	5.85E-03	1.36E-02	3.06E-02	3.06E-02
P ₁₅	9.22E-03	4.62E-03	1.13E-02	2.78E-02	2.78E-02

نلاحظ من خلال الجدول اعلاه ان المنظومة تصل الى حالة الاستقرار عند الخطوة 2500 ، بعد ذلك مهما زادت عدد الخطوات في برنامج الحاسبة تبقى النتائج كما هي في الخطوة 2500 وهذا يدل على وصول المنظومة الى حالة الاستقرار .

من اجل التحقق والتأكد من صحة النموذج الرياضي الذي قمنا ببنائه والبرنامج الذي قمنا بكتابة، نقارن نتائج الحل العددي المبينة في الجدول (4-2) مع نتائج الحل التحليلي لمنظومة الانتظار $M/M/1/15/GD/\infty$ ، التي يفترض ان تكون نتيجة المقارنة بينهما مساوية للصفر او قريبة منه.

ان معادلات حالة الاستقرار للحل التحليلي هي :

$$P_0 = \frac{1 - (\lambda / \mu)}{1 - (\lambda / \mu)^{N+1}}$$

$$P_j = (\lambda / \mu)^j P_0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

الجدول (4-3) يبين نتائج المقارنة بين الحل العددي والحل التحليلي للمنظومة قيد الدراسة .
جدول (4-3) نتائج الحل العددي والحل التحليلي ومقارنتهما لمنظومة

الانتظار $M/M/1/15/GD/\infty$

Probability	Numerics Solution	Analytics Solution	Absolute Difference
P ₀	0.116196	0.116198	2E-06
P ₁	0.105633	0.105634	1E-06
P ₂	0.096031	0.096031	0
P ₃	0.087301	0.087301	0
P ₄	0.079463	0.079364	9.9E-05
P ₅	0.072149	0.072149	0
P ₆	0.065655	0.06559	6.5E-05
P ₇	0.059662	0.059627	3.5E-05
P ₈	0.054227	0.054207	2E-05
P ₉	0.049278	0.049279	1E-06
P ₁₀	0.044899	0.044799	0.0001
P ₁₁	0.040772	0.040726	4.6E-05
P ₁₂	0.037002	0.037024	2.2E-05
P ₁₃	0.033758	0.033658	0.0001
P ₁₄	0.030698	0.030598	1E-04
P ₁₅	0.027816	0.027816	0

5- الاستنتاجات والتوصيات Recommendations and Conclusions

5.1 الاستنتاجات Conclusions

- صحة ودقة النموذج الرياضي الذي قام الباحث ببنائه وذلك بسبب صحة النتائج المستخرجة من الحل التحليلي والحل العددي، لان عند المقارنة بينهما فان الاختلاف المطلق بينهما يكون مساويا الى الصفر او قريب منه جدا .
- كثير من أنظمة الانتظار الواقعية لايمكن فيها الاعتماد على الحل التحليلي وانما يتم اللجوء الى الحل العددي .

5.2 التوصيات Recommendations

- ضرورة التطبيق على بيانات حقيقية مأخوذة من أنظمة انتظار حقيقية .
- ضرورة التعرف على توزيعات طورية اخرى تكون اكثر واقعية في أنظمة صفوف الانتظار كتوزيع ايرلانك.
- توليد مصفوفة معدل الانتقال للتوزيع الاسي بشكل طوعي ولعدد قنوات خدمة غير محدد.

References المصادر

- 1-Al-Hanbali.A.(2007) "Absorbing processes: phase type distribution " stochastic and operations research group, university of twente.
- 2- Chevalier, J-Chr. Van den Schrieck (May 2006)" Approximating the Performance of Call Centers with Queues using Loss Models.
- 3-Dakheel ,F.I(1996),"An Approach For Determing The Analytical Solution The machine Interference model ($E_k/E_L/m/N$)" College Of Education, Al-Mustansiriayah University.
- 4-Hermanns.H. and PieterKatoen.J.(2000)"Automated compositional markov chain generation "
- 5-John H.& Kurtis D.(1999) "Numerical Methods Using matlab"3rd Edition,Prentice – Hall.Inc.Simon &Schuster Aviacom Company.
- 6-Taha, Hamdy A.(1997) "Operations Research An Introduction", (16th edition),Prentice –Hall.Inc.Simon &Schuster Aviacom Company.
- 7-Winston.L.Wayle (1994) "Operations Research Applications and Algorithms" International Thomson Publishing .